

CONCOURS SMF JUNIOR 2020

1. ALGÈBRE

Soit G un groupe fini. On note T la table des caractères de G : c'est le tableau donnant les valeurs des caractères irréductibles complexes de G et, par la suite, on verra T comme une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{C} . (Les lignes de T sont indexées par les caractères irréductibles de G et les colonnes de T sont indexées par les classes de conjugaison de G .)

Une ligne ou une colonne de T est dite réelle si elle est formée de nombres réels.

- (1) Prouvez que T a autant de lignes réelles que de colonnes réelles. En déduire que G est d'ordre impair si et seulement si T possède une seule ligne réelle.

On s'intéresse à présent aux lignes et aux colonnes de T entières, c'est-à-dire formées de nombres entiers. On démontre facilement (comment ?) qu'une ligne ou une colonne est entière si et seulement si elle est formée de nombres rationnels. On dit que G satisfait à la propriété (E) si T a autant de lignes que de colonnes entières.

- (2) On suppose que l'exposant¹ de G est de la forme p^α ou $2p^\alpha$, où p est un nombre premier impair et α est un entier naturel. Prouvez que G satisfait à la propriété (E) .
- (3) Pouvez-vous donner d'autres classes de groupes qui satisfont à la propriété (E) ?
- (4) (Bougrement compliqué.) Pouvez-vous donner un groupe fini G qui ne satisfait pas à la propriété (E) ?

1. L'exposant de G est le PPCM des ordres des éléments de G .

Solution.

- (1) On désigne la conjugaison complexe par la barre habituelle. Si χ est le caractère d'une représentation irréductible $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $\overline{\chi} : g \mapsto \overline{\chi(g)}$ est aussi un caractère irréductible, à savoir celui de la représentation $g \mapsto \overline{\rho(g)}$. Par suite, il existe une matrice de permutation P telle que $\overline{T} = PT$. La i -ème ligne de T est réelle si et seulement si la matrice P a un 1 en position (i, i) .

Par ailleurs, avec les mêmes notations pour χ et ρ , si g est un élément d'ordre d , alors les valeurs propres de $\rho(g)$ sont des racines d -èmes de l'unité; ainsi $\rho(g^{-1})$ et $\overline{\rho(g)}$ ont mêmes valeurs propres (avec multiplicités), d'où $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$. Par suite, il existe une matrice de permutation Q telle que $\overline{T} = TQ$. La j -ème colonne de T est réelle si et seulement si la matrice Q a un 1 en position (j, j) .

Les relations d'orthogonalité impliquent l'inversibilité de T . Les matrices P et Q sont donc conjuguées. En particulier, elles ont même trace : le nombre de lignes réelles de T est égal au nombre de colonnes réelles de T .

Soit G est d'ordre impair. Choisissons une classe de conjugaison non triviale, disons la classe \mathcal{C}_g de g , stable par l'inversion $\iota : h \mapsto h^{-1}$. Alors ι induit une permutation de \mathcal{C}_g , et par Lagrange, cette permutation ne possède pas de point fixe, donc le cardinal de \mathcal{C}_g est pair, ce qui est absurde, puisque \mathcal{C}_g est l'orbite pour l'action d'un groupe d'ordre impair. Il existe donc une seule colonne de T réelle (celle de \mathcal{C}_e) et donc une seule ligne (celle du caractère trivial) de T réelle. La réciproque provient juste du lemme de Cauchy qui assure un élément d'ordre 2 dans un groupe d'ordre pair, et donc une classe de conjugaison non triviale, stable par ι .

- (2) La deuxième question repose sur la même stratégie, mais avec des complications techniques. La première observation est que chaque nombre apparaissant dans T est une somme de racines de l'unité : c'est un entier algébrique. Il est donc rationnel si et seulement s'il est entier (en termes savants : \mathbb{Q} est factoriel, donc est intégralement clos). Cela répond à la question « comment ? » insérée dans le texte.

La seconde observation est que dans la théorie des caractères d'un groupe fini, on peut remplacer \mathbb{C} par n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique zéro², donc, *a minima*, le corps des nombres algébriques (la clôture algébrique de \mathbb{Q}). Soient ρ_1, \dots, ρ_r des représentations matricielles de G fournissant les caractères irréductibles χ_1, \dots, χ_r ; soit K le corps engendré par les coefficients des différentes matrices $\rho_i(g)$ pour $(i, g) \in \{1, \dots, r\} \times G$. Alors K est une extension finie de \mathbb{Q} , et on choisit une extension normale L de \mathbb{Q} la contenant.

Soit m l'exposant de G . On peut supposer que L contient toutes les racines m -èmes de l'unité dans \mathbb{C} , c'est-à-dire contient l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})$ engendrée par ces racines. Soit Γ le groupe de Galois de cette extension cyclotomique. Chaque $\gamma \in \Gamma$ se prolonge en un automorphisme $\tilde{\gamma}$ du corps L ³. Par ailleurs, il est bien connu que le groupe des automorphismes du groupe $U_m = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^m = 1\}$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; on dispose donc d'isomorphismes

$$\Gamma \xrightarrow{\Psi_1} \text{Aut}(U_m) \xleftarrow{\Psi_2} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$$

2. Toute la théorie repose sur le lemme de Schur, qui demande un corps algébriquement clos, et sur la possibilité de prendre la moyenne de projecteurs, qui exige d'être en caractéristique nulle.

3. C'est pour pouvoir réaliser cette extension qu'on a choisi une extension L normale. De fait, le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})/\mathbb{Q})$ est un quotient du groupe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, et γ est l'image de $\tilde{\gamma}$ dans ce quotient.

avec $\Psi_1(\gamma) = \gamma|_{U_m}$ et $\Psi_2(\bar{a}) = (\zeta \mapsto \zeta^a)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $a \in \mathbb{Z}$ premier avec m .

Soit $\gamma \in \Gamma$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, la fonction $\gamma(\chi_i) : g \mapsto \gamma(\chi_i(g))$ est un caractère irréductible, à savoir le caractère de la représentation $g \mapsto \tilde{\gamma}(\rho_i(g))$. Par suite, il existe une matrice de permutation P_γ telle que $\gamma(T) = P_\gamma T$. La i -ème ligne de T est rationnelle si et seulement si elle est fixée par chaque $\gamma \in \Gamma$, autrement dit si et seulement si chaque matrice P_γ a un 1 en position (i, i) .

Par ailleurs, avec les mêmes notations, les valeurs propres de $\rho_i(g)$ appartiennent à U_m . Posant $\bar{a} = (\Psi_2)^{-1} \circ \Psi_1(\gamma)$, les matrices $\rho_i(g^a)$ et $\gamma(\rho_i(g))$ ont donc mêmes valeurs propres (avec multiplicités). Il vient ainsi $\gamma(\chi_i(g)) = \chi_i(g^a)$, d'où l'existence d'une matrice de permutation Q_γ telle que $\gamma(T) = TQ_\gamma$. La j -ème ligne de T est rationnelle si et seulement si chaque matrice Q_γ a un 1 en position (j, j) .

Comme dans la question 1, l'inversibilité de T permet de conclure que les matrices P_γ et Q_γ sont conjuguées. (Nous avons même mieux : $\gamma \mapsto P_\gamma$ et $\gamma \mapsto Q_\gamma$ sont deux représentations équivalentes (ou isomorphes) du groupe abélien Γ .) Elles ont donc même trace. Cet argument ne nous permet cependant pas de conclure, car les lignes (respectivement, colonnes) rationnelles sont les points fixes *simultanés* de toutes les matrices P_γ (respectivement, Q_γ). Mais nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse sur l'exposant de G : comme m est de la forme p^α ou $2p^\alpha$, le groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Le résultat désiré s'obtient alors simplement en appliquant ce qui précède à un générateur de Γ .

- (3) Avant d'aller plus loin dans les spéculations, nous allons reformuler l'étude précédente en termes d'actions de groupes. Nous avons construit deux actions du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. L'une est sur l'ensemble $\text{Cl}(G)$ des classes de conjugaison de G , par passage au quotient de $a \cdot g := g^a$, et l'autre sur l'ensemble $\text{irr}(G)$ des caractères irréductibles de G par $(a \cdot \chi)(g) = \chi(g^a)$. Nous avons ainsi obtenu deux représentations par permutations, et, de plus, à l'aide de la matrice T , nous avons vu que ces deux représentations de Γ étaient isomorphes. On a également vu que le nombre de colonnes, resp. lignes, entières était égal au cardinal de l'ensemble $\text{Cl}(G)^\Gamma$, resp. $\text{irr}(G)^\Gamma$, des classes, resp. des caractères irréductibles, Γ -invariant(e)s. Toutefois, on ne peut pas conclure l'égalité $|\text{Cl}(G)^\Gamma| = |\text{irr}(G)^\Gamma|$, à partir de l'isomorphisme des représentations par permutations. En revanche, cet isomorphisme assure que les multiplicités de la représentation triviale sont les mêmes pour les deux représentations, et donc, par un résultat classique, les nombres de Γ -orbites pour les deux actions sont égaux. Pour conclure, on a $|\text{Cl}(G)/\Gamma| = |\text{irr}(G)/\Gamma|$ et on veut $|\text{Cl}(G)^\Gamma| = |\text{irr}(G)^\Gamma|$. Malheureusement, il faut se rendre à l'évidence que les deux égalités ne sont pas équivalentes, même pour l'action d'un groupe abélien fini. Voici tout de même des situations où on peut conclure.

- (a) On l'a déjà vu : si Γ est cyclique, la propriété (E) est assurée par une formule de trace. Mais on peut noter la preuve alternative (plus longue) suivante. Les sous-groupes de Γ sont cycliques et associés aux diviseurs de son ordre. Si Γ agit sur un ensemble X , alors, on applique la formule de Burnside pour tout sous-groupe H de Γ pour obtenir un système triangulaire inversible entre le uplet des cardinaux des X/H et celui des cardinaux des X^H . On a donc bien le résultat espéré. Mais nous n'avons pas avancé.
- (b) Dans la présentation que l'on vient de faire, on voit que l'on peut remplacer Γ par l'image Γ' de l'action de Γ sur $\text{Cl}(G)$. L'image de l'action de Γ sur $\text{irr}(G)$ est d'ailleurs incluse dans Γ' (et même égale). On a donc la propriété (E) lorsque Γ' est cyclique. Ceci nous avance beaucoup. Parmi les groupes possédant la propriété (E), on récupère les groupes

symétriques et le groupe quaternionique d'ordre 8 (Γ' est trivial), ainsi que certains groupes alternés comme $\mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}_6$ ($\Gamma' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

- (c) On peut déduire directement l'égalité $|\text{Cl}(G)^\Gamma| = |\text{irr}(G)^\Gamma|$ de l'existence d'une bijection de $\text{Cl}(G)$ vers $\text{irr}(G)$ qui commute aux actions de Γ . Ceci couvre le cas où G est un groupe abélien fini, puisque les caractères irréductibles s'identifient aux morphismes de G dans U_m , et que ceux-ci constituent un groupe multiplicatif noté \widehat{G} isomorphe à G par la dualité des groupes abéliens finis. La bijection $G \simeq \widehat{G}$ commute à Γ puisque $a \cdot \chi = \chi^a$. Ceci couvre également le cas où G est un groupe diédral, la bijection Γ -équivariante de $\text{Cl}(G)$ vers $\text{irr}(G)$ pouvant ici être construite à la main.

- (4) C'est John G. Thompson⁴ qui a trouvé un contre-exemple avec un groupe fini d'ordre 32 ne vérifiant pas la propriété (E), voir [Journal of Algebra, 14, (1970)]. Il s'agit du groupe à deux générateurs x et y soumis aux relations

$$x^2 = y^8 = (xy)^4 = (xy)^2(yx)^{-2} = 1.$$

Ce groupe possède dans sa table de caractères 8 colonnes contre 6 lignes entières.

4. Médaille Fields, Lauréat du prix Abel.

2. ANALYSE

Un point $X = (i, j)$ de \mathbb{Z}^2 a quatre *voisins* :

$$X_d := (i + 1, j), X_g := (i - 1, j), X_h := (i, j + 1), X_b := (i, j - 1).$$

Nous considérons l'équation fonctionnelle d'inconnue $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow]0, \infty[$,

$$f(X) = \gamma_d f(X_d) + \gamma_g f(X_g) + \gamma_h f(X_h) + \gamma_b f(X_b), \forall X \in \mathbb{Z}^2, \quad (\text{EF})$$

où les constantes $\gamma_d, \gamma_g, \gamma_h, \gamma_b$ satisfont à la condition

$$\gamma_d, \gamma_g, \gamma_h, \gamma_b > 0, \gamma_d + \gamma_g + \gamma_h + \gamma_b = 1. \quad (\text{G})$$

- (1) Clairement, si f est une constante strictement positive, alors f est une solution de (EF). Donner un exemple de $\gamma_d, \gamma_g, \gamma_h, \gamma_b$ telles que (EF) ait des solutions non-constantes.

Pour $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow]0, \infty[$, soit

$$M(f) := \sup \left\{ \frac{f(Y)}{f(X)} ; X \in \mathbb{Z}^2, Y \text{ est un voisin de } X \right\}.$$

- (2) Si $\gamma_d = \gamma_g$ et $\gamma_h = \gamma_b$, trouver les solutions de (EF) telles que le sup dans la définition de $M(f)$ soit atteint.
- (3) Pour quelles valeurs de $\gamma_d, \gamma_g, \gamma_h, \gamma_b$ toute solution de (EF) est-elle constante ?

Solution.

- (1) Par analogie avec les récurrences sur \mathbb{Z} de la forme $x_i = \gamma_d x_{i+1} + \gamma_g x_{i-1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, cherchons une solution particulière sous la forme $f(i, j) = K^i$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}$, avec $K > 0$, $K \neq 1$. (EF) devient alors

$$1 = K \gamma_d + K^{-1} \gamma_g + \gamma_h + \gamma_b. \quad (2.1)$$

Cette condition et (G) sont vérifiées par exemple si $K = 2$, $\gamma_d = 1/6$, $\gamma_g = 1/3$, $\gamma_h = 1/4$ et $\gamma_b = 1/4$.

- (2) Soit $M := M(f) \geq 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $M = \frac{f(0,1)}{f(0,0)}$.

Étape 1.

Sous la seule hypothèse (G), nous allons montrer dans un premier temps que

$$f(X_h) = M f(X), \quad \forall X \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.2)$$

En admettant provisoirement (2.2), nous obtenons que

$$f(i, j) = M^j x_i, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \quad (2.3)$$

où (compte tenu de (EF)) la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (f(i, 0))_{i \in \mathbb{Z}}$ est donnée par la récurrence

$$[1 - M \gamma_h - M^{-1} \gamma_b] x_i = \gamma_d x_{i+1} + \gamma_g x_{i-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Revenons à (2.2), que nous prouvons maintenant. Soit

$$A := \{X \in \mathbb{Z}^2; f(X_h) = M f(X)\}.$$

Nous avons $(0, 0) \in A$. Il suffit de montrer que

$$[X \in A, Y \text{ voisin de } X] \implies Y \in A; \quad (2.5)$$

par une récurrence immédiate sur $|X| := |i| + |j|$, ceci implique (2.2).

La validité de (2.5) découle de

$$\begin{aligned} f(X_h) &= \gamma_d f((X_h)_d) + \gamma_g f((X_h)_g) + \gamma_h f((X_h)_h) + \gamma_b f((X_h)_b) \\ &= \gamma_d f((X_d)_h) + \gamma_g f((X_g)_h) + \gamma_h f((X_h)_h) + \gamma_b f((X_b)_h) \\ &\leq M [\gamma_d f(X_d) + \gamma_g f(X_g) + \gamma_h f(X_h) + \gamma_b f(X_b)] \\ &= M f(X) = f(X_h). \end{aligned}$$

Étape 2.

Faisons maintenant l'hypothèse $\gamma_d = \gamma_g$ et $\gamma_h = \gamma_b$. Dans ce cas, nous allons montrer que, si $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une solution strictement positive de (2.4), alors $M = 1$ et $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est constante; d'où, en utilisant (2.3), f est constante. (Et réciproquement.) En effet, nous avons

$$1 - M \gamma_h - M^{-1} \gamma_b = 1 - \underbrace{(M + M^{-1})}_{\geq 2} \gamma_h \leq 1 - 2 \gamma_h = 2 \gamma_d, \quad (2.6)$$

d'où (via (2.4))

$$x_i \geq \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Le lemme ci-dessous implique que nous avons égalité dans (2.7), d'où (en examinant le cas d'égalité dans (2.6)) $M = 1$ et la conclusion de cette étape.

(3) Étape 1.

Si $\gamma_d \neq \gamma_g$ ou $\gamma_h \neq \gamma_b$, alors (EF) a des solutions non constantes. En effet, supposons par exemple $\gamma_d \neq \gamma_g$. Notons $F(K)$ le membre de droite de (2.1). Alors $F(1) = 1$ et $F'(1) \neq 0$. Il s'ensuit que l'équation $F(K) = 1$ a une solution $K > 0$, $K \neq 1$. Nous obtenons que $f(i, j) := K^i$ est une solution non-constante de (EF).

Étape 2.

Si $\gamma_d = \gamma_g$ et $\gamma_h = \gamma_b$, alors toute solution de (EF) est constante. En effet, posons

$$N := \sup\{M(f); f \text{ solution de (EF)}\}. \quad (2.8)$$

Notons que $N < \infty$. En effet, si f est solution de (EF), alors

$$\frac{f(Y)}{f(X)} \leq M := \frac{1}{\min\{\gamma_d, \gamma_g, \gamma_h, \gamma_b\}}, \quad \forall X \in \mathbb{Z}^2, \forall Y \text{ voisin de } X. \quad (2.9)$$

Nous allons montrer qu'il existe g solution de (EF) avec $M(g) = N$ et $M(g)$ atteint. Le point b) implique $N = M(g) = 1$, et donc $M(f) \leq 1$, pour toute solution de (EF), d'où toute solution de (EF) est constante.

Il reste à montrer l'existence de g . Il existe des suites (f_n) de solutions de (EF), (X_n) de points de \mathbb{Z}^2 , Y_n voisin de X_n , $\forall n$, tels que $\frac{f_n(Y_n)}{f_n(X_n)} \rightarrow N$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer (en utilisant la linéarité de (EF) et en translatant l'argument de (f_n)) que $X_n = (0, 0)$ et $f_n(0, 0) = 1$, $\forall n$. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons par exemple supposer que $Y_n = (0, 1)$, $\forall n$. Admettons pour l'instant que, quitte à passer à une sous-suite, nous avons $f_n \rightarrow g$ simplement, avec $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow]0, \infty[$. Alors clairement g est solution de (EF) et $\frac{g(0,1)}{g(0,0)} = N$, d'où la conclusion.

Pour finir la preuve, il suffit de montrer que toute suite (f_n) de solutions de (EF) telles que $f_n(0, 0) = 1$ contient une sous-suite qui converge simplement vers une fonction strictement positive. De (2.9), nous obtenons par une récurrence immédiate sur $|X|$ que

$$M^{-|X|} \leq f_n(X) \leq M^{|X|}, \quad \forall X \in \mathbb{Z}^2, \forall n. \quad (2.10)$$

De (2.10), $(f_n(0, 1))$ contient une sous-suite convergente, mettons $(f_{n_k}((0, 1)))$; notons $g(0, 1)$ sa limite. La suite $(f_{n_k}(1, 0))$ contient une sous-suite convergente, $(f_{n_{k_\ell}}(1, 0))$; nous notons $g(1, 0)$ sa limite. En itérant (=procédé diagonal), nous obtenons une sous-suite de (f_n) , dont la limite simple, g , vérifie

$$M^{-|X|} \leq g(X) \leq M^{|X|}, \quad \forall X \in \mathbb{Z}^2.$$

Lemme 2.1. Une suite positive $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifiant (2.7) est constante.

Démonstration. Soit $y_i := x_{i+1} - x_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Grâce à (2.7), $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est décroissante. Si $j > i$, alors

$$-x_i \leq x_j - x_i = y_i + \dots + y_{j-1} \leq (j - i) y_i,$$

d'où (en faisant $j \rightarrow \infty$), $y_i \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. De même, nous avons $(j - i) y_j \leq x_{j+1} - x_i \leq x_{j+1}$, et en faisant $i \rightarrow -\infty$ nous obtenons $y_j \leq 0$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Finalement, $y_i \equiv 0$, d'où la conclusion. □

3. COMBINATOIRE

Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Quelles sont toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$f(x + 1) + 1 = f(f(x) + 1)$$

pour tout x dans \mathbb{N} ?

Solution.

La seule solution est le décalage $s : x \mapsto x + 1$.

On remarque d'abord que f est solution si et seulement si $sfs = fsf$ pour le produit de composition (on ne note pas la composition pour alléger l'écriture).

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une solution. Alors s commute avec $h = sfsfsf = fsfsfs$, donc $h = s^m$ où $m = h(0)$. Une conséquence est que f est injective et que l'image de f contient tous les entiers supérieurs ou égaux à m .

Pour une injection arbitraire $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, notons $Mu = \mathbb{N} \setminus u(\mathbb{N})$. En particulier $M_s = \{0\}$ et M_f est fini. On vérifie facilement que $M(uv)$ est l'union disjointe de Mu et $u(Mv)$ si u et v sont injectives, ce qui donne pour les cardinaux $|M(uv)| = |Mu| + |Mv|$. La relation $sfs = fsf$ donne alors $|M_f| + 2 = 2|M_f| + 1$, donc $|M_f| = 1$. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $M_f = \{a\}$. La relation $sfs = fsf$ donne aussi $M_s \cup s(M_f) \cup sf(M_s) = M_f \cup f(M_s) \cup fs(M_f)$, i.e. $\{0, a + 1, f(0) + 1\} = \{a, f(0), f(a + 1)\}$, de cardinal 3.

De plus, $f(0) = 0$ entraînerait $sfs(0) = f(1) + 1 > f(1) = fsf(0)$, une contradiction ; on a donc $f(0) \neq 0$, donc $f(0) = a + 1$. Ceci implique $a \neq f(0) + 1$, donc $a = 0$. Il s'ensuit que $f(0) = 1$, donc $f(1) = f(0) + 1 = 2$. Enfin l'égalité $sfs = fsf$ donne par récurrence $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, i.e. $f = s$.

4. GÉOMÉTRIE

Soient $n \geq 2$ et $k \geq 1$ deux entiers. On définit l'ensemble $\mathcal{C}_{n,k}$ des fonctions $f := (f_1, \dots, f_n)$ de classe \mathcal{C}^∞ définies sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vérifiant

$$\sum_{j=1}^n (x_j)^k f_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (4.1)$$

- (1) Montrer que $\mathcal{C}_{n,k}$ est non-vide si n est pair.
- (2) Montrer que $\mathcal{C}_{n,k}$ est non-vide si k est pair.
- (3) Montrer que $\mathcal{C}_{n,k}$ est vide si n et k sont impairs.

Solution.

(1) Si $n = 2m$, la fonction $f := (f_1, \dots, f_{2m})$ définie pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par

$$f_{2\ell-1}(x_1, \dots, x_n) := (x_{2\ell})^k, \quad f_{2\ell}(x_1, \dots, x_n) := -(x_{2\ell-1})^k, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, m\}$$

appartient à $\mathcal{C}_{n,k}$. En effet, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et vérifie (4.1).

(2) Si k est pair, la fonction $f := (f_1, \dots, f_n)$ définie pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par

$$f_1(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=2}^n (x_j)^k, \quad f_\ell(x_1, \dots, x_n) := -(x_1)^k, \quad \forall \ell \in \{2, \dots, n\}$$

appartient à $\mathcal{C}_{n,k}$, car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et vérifie (4.1).

(3) La fonction $\varphi_{n,k} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^n (x_j)^{k+1}$$

est clairement une submersion. Par conséquent, l'ensemble $M_{n,k} := (\varphi_{n,k})^{-1}(1)$ est une sous-variété lisse de \mathbb{R}^n dimension $n - 1$, dont l'espace tangent en chaque point est le noyau de $d\varphi$. Comme

$$d\varphi_x(y) = (k+1) \sum_{j=1}^n (x_j)^k y_j,$$

si $\mathcal{C}_{n,k}$ est non-vide, tout élément f de $\mathcal{C}_{n,k}$ définit donc un champ de vecteurs X_f de classe \mathcal{C}^∞ tangent à $M_{n,k}$, qui ne s'annule en aucun point.

Si $k = 2p - 1$ est impair, la variété $M_{n,k}$ est difféomorphe à la sphère S^{n-1} . En effet, les fonctions $F, G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ définies par

$$F(x) := \frac{x}{|x|_2}, \quad G(x) := \frac{x}{|x|_{2p}}$$

sont clairement de classe \mathcal{C}^∞ , et leurs restrictions à $M_{n,k}$ et S^{n-1} respectivement définissent des fonctions lisses $\tilde{F} : M_{n,k} \rightarrow S^{n-1}$ et $\tilde{G} : S^{n-1} \rightarrow M_{n,k}$ qui sont évidemment inverses l'une à l'autre.

Le champ de vecteurs X_f définit donc un champ de vecteurs tangent à S^{n-1} de classe \mathcal{C}^∞ qui ne s'annule jamais. Comme tout champ de vecteurs lisse sur une sphère de dimension paire s'annule au moins une fois, on obtient donc une contradiction lorsque n est impair.

5. MODÉLISATION

On considère une société qui achète et vend des objets d'occasion (on peut penser à des livres, des DVD, ou des jeux vidéos). Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a qu'un seul type d'objets, toujours en bon état. On s'intéresse dans ce problème à la politique optimale d'achat et de vente de la société.

Considérons un intervalle de temps $[0, T]$ (avec $T > 0$) et un prix de référence P .

A chaque instant $t \in [0, T]$ on note S_t le nombre d'objets en stock au sein de la société. On suppose qu'entre t et $t + dt$, si la société propose d'acheter une unité de l'objet au prix $P - \delta_t^{\text{achat}}$, alors la probabilité d'un tel achat au cours de la période est $e^{-\delta_t^{\text{achat}}} dt$. De même, entre t et $t + dt$, si la société propose de vendre une unité de l'objet au prix $P + \delta_t^{\text{vente}}$, alors la probabilité d'une telle vente au cours de la période est $e^{-\delta_t^{\text{vente}}} dt$.

N.B. : On supposera, pour simplifier, que les valeurs de δ_t^{achat} et δ_t^{vente} peuvent être positives comme négatives (même si le prix en devenait négatif).

On suppose que la société cesse de proposer des prix à la vente lorsque, et tant que, son stock est à 0 et cesse de proposer des prix à l'achat lorsque, et tant que, son stock est égal à une valeur maximale notée N .

Stocker les objets requiert de l'espace et nous supposons que la société paye entre t et $t + dt$ un coût de stockage $c(S_t)dt$ où $c : \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (a priori croissante).

Le but de la société est de choisir sa politique tarifaire optimalement de manière à maximiser l'espérance de son profit sur l'intervalle $[0, T]$, en supposant que les objets restant stockés à l'instant T seront valorisés au prix P .

- (1) Modéliser le problème et déterminer la meilleure stratégie d'achat/vente de la société.
- (2) Montrer que l'espérance maximale de gain par unité de temps, c'est-à-dire l'espérance maximale de gain sur $[0, T]$ divisée par T , converge vers une limite finie lorsque l'horizon T tend vers l'infini. Caractériser simplement cette limite.

Indice :

Pour traiter ce problème, on pourra introduire $u_0^T, u_1^T, \dots, u_N^T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions (au nombre de $N+1$), appelées fonctions valeurs, telles que, pour $n \in \{0, \dots, N\}$ et $t \in [0, T]$, $u_n^T(t)$ représente l'espérance de gain la plus grande possible entre t et T si la société a un stock de n objets à l'instant t . On pourra en particulier justifier (heuristiquement dans un premier temps) que $u_0^T, u_1^T, \dots, u_N^T$ vérifient

$$0 = \frac{d}{dt} u_n^T(t) - c(n) + \mathbf{1}_{0 \leq n < N} \max_{\delta^{\text{achat}}} \left\{ e^{-\delta^{\text{achat}}} (u_{n+1}^T(t) - u_n^T(t) - P + \delta^{\text{achat}}) \right\} \quad (5.1)$$

$$+ \mathbf{1}_{0 < n \leq N} \max_{\delta^{\text{vente}}} \left\{ e^{-\delta^{\text{vente}}} (u_{n-1}^T(t) - u_n^T(t) + P + \delta^{\text{vente}}) \right\}, \quad \forall (t, n) \in [0, T] \times \{0, \dots, N\}$$

et réalisent la condition terminale

$$u_n^T(T) = nP, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}. \quad (5.2)$$

Solution.Raisonnement heuristique

A l'instant T , il est dit dans l'énoncé que les objets restant sont valorisés au prix P . On a donc nécessairement $u_n^T(T) = nP$ pour tout n .

Considérons maintenant un temps $t \in [0, T[$ et supposons que $S_t = n \in \{1, \dots, N-1\}$. Entre t et $t + dt$, si la stratégie d'achat/vente est donnée par δ^{achat} et δ^{vente} , il y a trois situations :

- La société procède à un achat au prix $P - \delta^{\text{achat}}$ (ceci arrive avec probabilité $e^{-\delta^{\text{achat}}} dt$).
- La société procède à une vente au prix $P + \delta^{\text{vente}}$ (ceci arrive avec probabilité $e^{-\delta^{\text{vente}}} dt$).
- Aucune transaction n'a lieu (ceci arrive avec probabilité $1 - e^{-\delta^{\text{achat}}} dt - e^{-\delta^{\text{vente}}} dt$).

Dans tous les cas, un coût $c(n)dt$ est payé.

On doit donc avoir

$$\begin{aligned} u_n^T(t) = -c(n)dt + \max_{\delta^{\text{achat}}, \delta^{\text{vente}}} \{ & e^{-\delta^{\text{achat}}} dt (u_{n+1}^T(t+dt) - (P - \delta^{\text{achat}})) \\ & + e^{-\delta^{\text{vente}}} dt (u_{n-1}^T(t+dt) + (P + \delta^{\text{vente}})) \\ & + (1 - e^{-\delta^{\text{achat}}} dt - e^{-\delta^{\text{vente}}} dt) u_n^T(t+dt) \} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u_n^T(t) = -c(n)dt + \max_{\delta^{\text{achat}}, \delta^{\text{vente}}} \{ & e^{-\delta^{\text{achat}}} dt (u_{n+1}^T(t) - u_n^T(t) - (P - \delta^{\text{achat}})) \\ & + e^{-\delta^{\text{vente}}} dt (u_{n-1}^T(t) - u_n^T(t) + (P + \delta^{\text{vente}})) \\ & + u_n^T(t) + \frac{d}{dt} u_n^T(t) + \text{des termes petits devant } dt \}. \end{aligned}$$

En simplifiant on obtient

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} u_n^T(t) - c(n) + \max_{\delta^{\text{achat}}} \{ & e^{-\delta^{\text{achat}}} (u_{n+1}^T(t) - u_n^T(t) - P + \delta^{\text{achat}}) \} \\ & + \max_{\delta^{\text{vente}}} \{ e^{-\delta^{\text{vente}}} (u_{n-1}^T(t) - u_n^T(t) + P + \delta^{\text{vente}}) \}. \end{aligned}$$

Les cas $n = 0$ (sans possibilité de vente) et $n = N$ (sans possibilité d'achat) se traitent de la même manière et l'on obtient l'équation annoncée.

On constate aisément que $\max_{\delta} \{ e^{-\delta}(x + \delta) \}$ se calcule explicitement. En effet, à x donné, le maximiseur est $\delta = 1 - x$ et le maximum est e^{x-1} .

L'équation (5.1) est donc

$$0 = \frac{d}{dt} u_n^T(t) - c(n) + 1_{0 \leq n < N} e^{-1} \exp(u_{n+1}^T(t) - u_n^T(t) - P) + 1_{0 < n \leq N} e^{-1} \exp(u_{n-1}^T(t) - u_n^T(t) + P)$$

c'est-à-dire

$$0 = \exp(u_n^T(t)) \frac{d}{dt} u_n^T(t) - c(n) \exp(u_n^T(t)) + \mathbf{1}_{0 \leq n < N} e^{-1-P} \exp(u_{n+1}^T(t)) + \mathbf{1}_{0 < n \leq N} e^{-1+P} \exp(u_{n-1}^T(t)).$$

Résolution du système d'EDO's

Si l'équation

$$0 = \exp(v_n^T(t)) \frac{d}{dt} v_n^T(t) - c(n) \exp(v_n^T(t)) + \mathbf{1}_{0 \leq n < N} e^{-1-P} \exp(v_{n+1}^T(t)) + \mathbf{1}_{0 < n \leq N} e^{-1+P} \exp(v_{n-1}^T(t)), \quad (5.3)$$

avec condition terminale

$$v_n^T(T) = nP, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\} \quad (5.4)$$

a une solution $(\tilde{v}_0^T, \dots, \tilde{v}_N^T)$ de classe C^1 en temps sur $[0, T]$ alors en posant $\tilde{w}_n^T(t) = \exp(\tilde{v}_n^T(t))$ on obtient

$$0 = \frac{d}{dt} \tilde{w}_n^T(t) - c(n) \tilde{w}_n^T(t) + \mathbf{1}_{0 \leq n < N} e^{-1-P} \tilde{w}_{n+1}^T(t) + \mathbf{1}_{0 < n \leq N} e^{-1+P} \tilde{w}_{n-1}^T(t)$$

avec la condition terminale $\tilde{w}_n^T(T) = \exp(nP)$, c'est-à-dire un système d'équations différentielles linéaires.

Considérons alors l'unique solution $w^T = (w_0^T, \dots, w_N^T)'$ de ce système d'équations différentielles linéaires définie par $w^T(t) = \exp(B(T-t))f$ où $f = (1, e^P, \dots, e^{NP})'$ et où B est la matrice tridiagonale de taille $N+1$ définie par :

- Une diagonale de termes $-c(0), \dots, -c(N)$.
- Une sur-diagonale constante égale à e^{-1-P} .
- Une sous-diagonale constante égale à e^{-1+P} .

En posant $C > \max_{0 \leq n \leq N} c(n)$, on voit aisément que $e^{C(T-t)}w^T(t)$ n'est constituée que de termes strictement positifs (par définition de l'exponentielle d'une matrice), d'où le fait que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$ et tout $t \in [0, T]$, on ait $w_n^T(t) > 0$.

On peut alors définir pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$ la fonction $v_n^T : t \in [0, T] \mapsto \log(w_n^T(t))$ et $(v_0^T, \dots, v_N^T)'$ est alors trivialement l'unique solution de classe C^1 sur $[0, T]$ de (5.3) avec condition terminale (5.4).

Identification avec les fonctions valeurs et détermination de la politique optimale

Pour $t \in [0, T)$, posons

$$\mathcal{A}_t^{\text{achat}} = \{\delta^{\text{achat}} = (\delta_0^{\text{achat}}, \dots, \delta_{N-1}^{\text{achat}}) \in L^\infty([t, T], \mathbb{R}^N)\}$$

et

$$\mathcal{A}_T^{\text{vente}} = \{\delta^{\text{vente}} = (\delta_1^{\text{vente}}, \dots, \delta_N^{\text{vente}}) \in L^\infty([t, T], \mathbb{R}^N)\}$$

les ensembles des fonctions de politique d'achat et de vente (fonctions du temps, le stock étant en indice).

Considérons pour $t \in [0, T]$, $n \in \{0, \dots, N\}$ et $\delta = (\delta^{\text{achat}}, \delta^{\text{vente}}) \in \mathcal{A}_t^{\text{achat}} \times \mathcal{A}_t^{\text{vente}}$, les processus d'achat $\left(N_s^{\text{achat}, t, 0, \delta^{\text{achat}}}\right)_{s \in [t, T]}$ et de vente $\left(N_s^{\text{vente}, t, 0, \delta^{\text{vente}}}\right)_{s \in [t, T]}$ partant de 0 à l'instant t et dont les

dynamiques sont associées aux politiques de prix données par δ^{achat} et δ^{vente} pour un processus de stock $(S_s^{t,n,\delta})_{s \in [t,T]}$ définie par $S_s^{t,n,\delta} = n + N_s^{\text{achat},t,0,\delta^{\text{achat}}} - N_s^{\text{vente},t,0,\delta^{\text{vente}}}$.

Remarques :

- La définition ci-dessus n'est pas circulaire, contrairement aux apparences, puisque les intensités de sauts dépendent du processus de stock dont on prend la limite à gauche.
- Pour être parfaitement rigoureux ici il faudrait définir les processus par des processus ponctuels élémentaires (de type Poisson) et opérer à un changement de probabilités pour obtenir les intensités adéquates. La correction du concours ne sera évidemment pas tatillonne sur ce point.

Ecrivons alors la dynamique de $v_{S_s^{t,n,\delta}}^T(s)$ entre $s = t$ et $s = T$:

$$v_{S_{T-}^{t,n,\delta}}^T(T) - v_n^T(t) = \int_t^T \left(\frac{d}{ds} v_{S_s^{t,n,\delta}}^T(s) ds + \left(v_{S_s^{t,n,\delta}}^T(s) - v_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^T(s) \right) dS_s^{t,n,\delta} \right).$$

En utilisant la condition terminale et en passant à l'espérance, on obtient

$$v_n^T(t) = \mathbb{E} \left[PS_{T-}^{t,n,\delta} - \int_t^T \left(\frac{d}{ds} v_{S_s^{t,n,\delta}}^T(s) ds + 1_{0 \leq S_{s-}^{t,n,\delta} < N} \exp \left(-\delta_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^{\text{achat}}(s) \right) \left(v_{S_{s-}^{t,n,\delta}+1}^T(s) - v_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^T(s) \right) ds \right. \right. \\ \left. \left. + 1_{0 < S_{s-}^{t,n,\delta} \leq N} \exp \left(-\delta_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^{\text{vente}}(s) \right) \left(v_{S_{s-}^{t,n,\delta}-1}^T(s) - v_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^T(s) \right) ds \right) \right].$$

De l'équation (5.1), on tire alors

$$v_n^T(t) \geq \mathbb{E} \left[\int_t^T - (P - \delta_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^{\text{achat}}(s)) dN_s^{\text{achat},t,0,\delta^{\text{achat}}} + (P + \delta_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^{\text{vente}}(s)) dN_s^{\text{vente},t,0,\delta^{\text{vente}}} - c(S_{s-}^{t,n,\delta}) ds + PS_{T-}^{t,n,\delta} \right]$$

avec égalité lorsque la politique d'achat/vente est la politique (dès lors optimale) définie par

$$\delta_n^{\text{achat}^*}(t) = 1 - (v_{n+1}^T(t) - v_n^T(t) - P), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ \delta_n^{\text{vente}^*}(t) = 1 - (v_{n-1}^T(t) - v_n^T(t) + P), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}.$$

En particulier, si l'on définit, cette fois rigoureusement,

$$u_n^T(t) := \sup_{\delta = (\delta^{\text{achat}}, \delta^{\text{vente}}) \in \mathcal{A}_t^{\text{achat}} \times \mathcal{A}_t^{\text{vente}}} \mathbb{E} \left[\int_t^T \left(-(P - \delta_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^{\text{achat}}(s)) dN_s^{\text{achat},t,0,\delta^{\text{achat}}} \right. \right. \\ \left. \left. + (P + \delta_{S_{s-}^{t,n,\delta}}^{\text{vente}}(s)) dN_s^{\text{vente},t,0,\delta^{\text{vente}}} - c(S_{s-}^{t,n,\delta}) ds \right) + PS_{T-}^{t,n,\delta} \right]$$

on a bien $(u_0^T, \dots, u_N^T) = (v_0^T, \dots, v_N^T)$.

Une manière peut-être plus élégante d'écrire la politique optimale d'achat/vente consiste à utiliser $v_n^T(t) - nP = u_n^T(t) - nP = \log(w_n^T(t) e^{-nP}) = \log(\omega_n^T(t))$ où $\omega^T(t) = \exp(\tilde{B}(T-t)) \tilde{f}$ où $\tilde{f} = (1, \dots, 1)'$ et où \tilde{B} est la matrice tridiagonale de taille $N+1$ définie par :

- Une diagonale de termes $-c(0), \dots, -c(N)$.
- Une sur-diagonale et une sous-diagonale de constantes égales à e^{-1} .

On a alors

$$\delta_n^{\text{achat}^*}(t) = 1 - \log \left(\frac{\omega_{n+1}^T(t)}{\omega_n^T(t)} \right), \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$$

et

$$\delta_n^{\text{vente}^*}(t) = 1 - \log \left(\frac{\omega_{n-1}^T(t)}{\omega_n^T(t)} \right), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}.$$

Analyse asymptotique

En posant $C > \max_{0 \leq n \leq N} c(n)$, on voit aisément que $B_C = B + CI_{N+1}$ vérifie les hypothèses du théorème de Perron-Frobenius donc son rayon spectral ρ est une valeur propre algébriquement simple et on peut prendre ν un vecteur propre associé à coefficients tous strictement positifs.

f s'écrit $\alpha\nu + \omega$ où $\omega \in \text{Im}(B_C - \rho I_{N+1}) = \text{Ker}(B'_C - \rho I_{N+1})^\perp$. Par Perron-Frobenius appliqué à B'_C , $\omega = f - \alpha\nu$ est orthogonal à un vecteur à coefficients tous strictement positifs donc $\alpha > 0$.

In fine, on obtient, à t fixé,

$$e^{(C-\rho)(T-t)} w^T(t) = \exp((B_C - \rho I_{N+1})(T-t)) f \rightarrow_{T \rightarrow +\infty} \alpha\nu.$$

On en conclut que, indépendamment de n , $\frac{w_n^T(0)}{T} \rightarrow_{T \rightarrow +\infty} \rho - C$. En particulier, cette limite est le maximum du spectre réel de la matrice B .

Remarque : B et \tilde{B} étant similaires, on peut aussi écrire le critère avec \tilde{B} au lieu de B (en particulier, la limite est indépendante de P).

6. PROBABILITÉS–STATISTIQUES

Les problèmes de bandit manchot apparaissent quand on cherche à optimiser un gain lors d'une suite d'expériences où on dispose à chaque instant d'un certain nombre de choix (dans le problème original, sur quelle machine à sous jouer). Par exemple, lorsqu'on cherche à optimiser le plus vite possible le traitement de patients en choisissant entre deux traitements.

On considère ici une variante de problème de bandit manchot où le nombre de bras peut augmenter au cours du temps. La récompense du bras i suit la loi $\mathcal{N}(\mu_i, 1)$. On appelle μ_i la caractéristique du bras. À l'instant initial $t = 0$, le bandit n'a qu'un seul bras de caractéristique $\mu_1 = 0$. Aux instants $t \geq 1$, on peut au choix :

- Tirer un bras (on choisit un bras i et on observe une variable aléatoire $Y_t \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$. Conditionnellement à μ_i , cette observation Y_t est indépendante de toutes les observations $(Y_s)_{1 \leq s < t}$ précédentes ainsi que des caractéristiques des autres bras) ;
- Générer un nouveau bras à partir d'un bras existant puis le tirer : on choisit un bras i et on génère un nouveau bras j de caractéristique $\mu_j \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$ pour un réel $\sigma > 0$ connu. Conditionnellement à μ_i , cette caractéristique μ_j est indépendante de toutes les observations $(Y_s)_{1 \leq s < t}$ précédentes ainsi que des caractéristiques des autres bras. Ensuite, on tire ce nouveau bras.

L'objectif est de maximiser la croissance de la somme $\sum_{s=1}^t Y_s$.

- (1) Proposer un algorithme et une fonction f ayant la croissance la plus rapide possible tels qu'il existe une constante $c > 0$ telle qu'en suivant cet algorithme,

$$\mathbb{P} \left(\sum_{s=1}^t Y_s \geq cf(t) \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1.$$

Un algorithme ne peut utiliser à chaque étape que les observations obtenues aux étapes précédentes, ainsi qu'un éventuel aléa interne, pour prendre sa décision.

- (2) Trouver une fonction g ayant la croissance la plus lente possible telle qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que, quel que soit l'algorithme choisi,

$$\mathbb{P} \left(\sum_{s=1}^t Y_s \leq Cg(t) \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1.$$

On mettra $f(t)$ et $g(t)$ sous la forme la plus simple possible, par exemple un produit de puissances de t et de $\log t$. On cherchera à rendre f et g aussi proches que possible.

Solution.

Une solution est $f(t) = g(t) = t^2$.

Le problème se reformule ainsi : soient deux suites $(\varepsilon_s)_{s \geq 1}$ et $(\eta_s)_{s \geq 1}$ indépendantes de variables aléatoires i.i.d. de lois respectives $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Notons I_t la collection de bras à l'instant $t - 1$ et $|I_t|$ son cardinal.

A l'instant t , soit on choisit un bras i et on observe $Y_t = \mu_i + \varepsilon_t$, soit on choisit un bras i , on génère un bras j de caractéristique $\mu_j = \mu_i + \eta_{|I_t|}$ qu'on ajoute à la collection (donc $I_{t+1} = I_t \cup \{j\}$), et on observe $Y_t = \mu_j + \varepsilon_t$.

- (1) On propose l'algorithme suivant. Au début, on définit le bras courant comme étant l'unique bras de la collection. Puis, pour tout $t \geq 1$,
- aux instants $2t - 1$ et $2t$, on génère un nouveau bras à partir du bras courant et on fait une expérience sur ces nouveaux bras ;
 - on définit le nouveau bras courant comme étant celui des deux nouveaux bras ayant la plus grande observation.

Notons S_t le bras courant pendant les instants $2t - 1$ et $2t$.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{2t} Y_s &= \sum_{s=1}^t (\mu_{S_s} + \eta_{2s-1} + \mu_{S_s} + \eta_{2s}) + \sum_{s=1}^{2t} \varepsilon_s \\ &= 2 \sum_{s=1}^t \mu_{S_s} + \sum_{s=1}^{2t} (\eta_s + \varepsilon_s). \end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres, $\mathbb{P}(\sum_{s=1}^{2t} (\eta_s + \varepsilon_s) \geq -t) \rightarrow 1$.

Notons $\Delta_t = \mu_{S_{t+1}} - \mu_{S_t}$, alors

$$\Delta_t = \max(\eta_{2t-1}, \eta_{2t}) \mathbf{1}_{\text{max bien choisi}} + \min(\eta_{2t-1}, \eta_{2t}) (1 - \mathbf{1}_{\text{max bien choisi}})$$

où l'évènement "max bien choisi" = $\{\text{signe}(Y_{2t-1} - Y_{2t}) = \text{signe}(\eta_{2t-1} - \eta_{2t})\}$ correspond au fait que l'ordre des observations Y_{2t-1} et Y_{2t} est le même que celui des caractéristiques des bras.

Chaque Δ_t ne dépend que de η_{2t-1} , η_{2t} , ε_{2t-1} et ε_{2t} . Ces variables sont donc i.i.d.. Par ailleurs, $Y_{2t-1} - Y_{2t} = (\eta_{2t-1} - \eta_{2t}) + (\varepsilon_{2t-1} - \varepsilon_{2t})$ et $\varepsilon_{2t-1} - \varepsilon_{2t}$ suit une loi gaussienne centrée, donc $\mathbb{P}(\text{max bien choisi}) > 1/2$, donc $\mathbb{E}[\Delta_t] > 0$.

Comme $\mu_{S_1} = \mu_1 = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^t \mu_{S_s} &= \sum_{s=1}^{t-1} (t-s) \Delta_s \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} t \sum_{s=1}^{t-1} \frac{s}{t} \Delta_s. \end{aligned}$$

Notons $v = \text{Var}(\Delta_1)$, alors $\text{Var}(\sum_{s=1}^{t-1} \frac{s}{t} \Delta_s) \leq vt/3$, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{s=1}^{t-1} \frac{s}{t} \Delta_s \geq \frac{t-1}{2} \mathbb{E}[\Delta_1] - \delta t\right) \geq 1 - \frac{vt/3}{\delta^2 t^2}.$$

On en déduit que pour toute constante $c < \mathbb{E}[\Delta_1]/2$,

$$\mathbb{P} \left(\sum_{s=1}^t \mu_{S_t} \geq ct^2 \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1,$$

d'où le résultat.

(2) Notons i_t le bras dont on observe l'observation Y_{i_t} à l'instant t , alors

$$\sum_{s=1}^t Y_s = \sum_{s=1}^t \mu_{i_t} + \sum_{s=1}^t \varepsilon_s$$

et par la loi des grands nombres $\mathbb{P}(\sum_{s=1}^t \varepsilon_s \leq t) \rightarrow 1$. Par récurrence,

$$\max_{i \in I_t} \mu_i \leq \sum_{s=1}^t \max(\eta_s, 0).$$

Il en découle que quel que soit l'algorithme choisi,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^t \mu_{i_t} &\leq \sum_{s=1}^t (t+1-s) \max(\eta_s, 0) \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} t \sum_{s=1}^t \frac{s}{t} \max(\eta_s, 0) \\ &\leq t \sum_{s=1}^t \max(\eta_s, 0). \end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres, on a donc pour toute constante $C > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\mathbb{P} \left(\sum_{s=1}^t \mu_{i_t} \leq Ct^2 \right) \rightarrow 1.$$

On en déduit le résultat avec $g : t \mapsto t^2$ et n'importe quel $C > \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

7. SYSTÈMES DYNAMIQUES

Ce problème vise à donner une nouvelle démonstration d'une formule établie par Milnor et Thurston pour l'entropie de certaines applications de l'intervalle.

La question (1) étudie le cas modèle d'une application affine par morceaux. La question (2) traite le cas plus subtil des applications quadratiques.

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ telle que $f(I) \subseteq I$. On dit que f est monotone par morceaux s'il existe une subdivision finie $a = c_0 < c_1 < \dots < c_K = b$ telle que f soit monotone sur chaque $[c_i, c_{i+1}]$. On note $\text{Mon}(f)$ le plus petit entier $K \geq 1$ possédant cette propriété. On peut définir l'entropie de f par deux formules équivalentes :

$$h(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \text{Mon}(f^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \text{Var}(f^n), \quad (7.1)$$

où $f^n = f \circ \dots \circ f$ (composée n fois) et $\text{Var}(g)$ est la variation totale de g . Dans la formule précédente, on admet l'existence des limites et leur égalité (résultats de Misiurewicz et Szlenk). Par convention, la dérivée de la fonction $x \mapsto |x|$ est

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \in \{\pm 1, 0\}.$$

Si nécessaire, le résultat d'une question peut être admis pour continuer le problème.

- (1) Applications tentes. Pour $s \in]1, 2]$ et $q = \frac{1}{s-1}$, on considère l'application $T_s : [-q, q] \rightarrow [-q, q]$ définie par $T_s(x) = s|x| - 1$.

- (a) Montrer que $h(T_s) = \ln s$.
- (b) On suppose dans cette question qu'il existe un entier $m \geq 0$ minimal tel que $T_s^{m+1}(0) = 0$. Trouver une formule explicite de T_s^n pour $n \geq 1$. En déduire que $1/s$ est une racine du polynôme

$$D_s(t) = 1 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_m t^m,$$

où $d_i = \text{sgn}(T_s^i)'(-1) \in \{-1, 1\}$ pour $i = 0, \dots, m$.

- (c) On pose $\phi_n(s) = T_s^n(0)$. Montrer que ϕ_n est dérivable en s si $\phi_k(s) \neq 0$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$. Montrer que pour tout $s \in]1, 2]$ et $n \geq 1$ tels que ϕ_n soit dérivable en s ,

$$|\phi_n'(s)| < q_s^2 s^n.$$

Ensuite, en supposant $|\phi_n'(s)| > q^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $\phi_k'(s)$ est dérivable en s et $k \geq n$, alors

$$\alpha s^k < |\phi_k'(s)|.$$

Pour la suite, on admettra que pour tout $s_0 > 1$ il existe des constantes $C, N > 0$ telles que pour tout $s > s_0$ et $n \geq N$, si ϕ_n est dérivable en s , alors $C^{-1} s^n < |\phi_n'(s)| < C s^n$.

- (d) Pour un $s \in]1, 2]$ fixé, on suppose dans cette question que $T_s^n(0) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. On considère l'application $D_s(t) = \sum_{i \geq 0} d_i t^i$ sur le disque unité. Montrer que

$$D_s\left(\frac{1}{s}\right) = 0.$$

- (2) *Applications quadratiques.* Pour $c \in [-2, 1/4]$ et $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$, on considère l'application $f_c : [-p, p] \rightarrow [-p, p]$ définie par

$$f_c(x) = x^2 + c.$$

Noter que $f_c(p) = p > 0$. On admet l'existence de $c_F \approx -1.4$ tel que $h(f_c) = 0$ si $c \in [c_F, 1/4]$ et $h(f_c) > 0$ si $c \in [-2, c_F[$. Pour la suite, on suppose que $c \in [-2, c_F[$. On note $C_c := \bigcup_{n \geq 0} f_c^{-n}(0)$ l'ensemble des préimages du point critique 0.

- (a) Dans cette question, on suppose que $\overline{C_c} = [-p, p]$ et qu'il existe $s \in]1, 2]$ tel que

$$\operatorname{sgn}(f_c^n)'(c) = \operatorname{sgn}(T_s^n)'(-1) \neq 0$$

pour tout $n \geq 0$. Montrer que T_s et f_c sont conjuguées, i.e., qu'il existe un homéomorphisme $g : [-q, q] \rightarrow [-p, p]$ tel que

$$g \circ T_s = f_c \circ g. \quad (7.2)$$

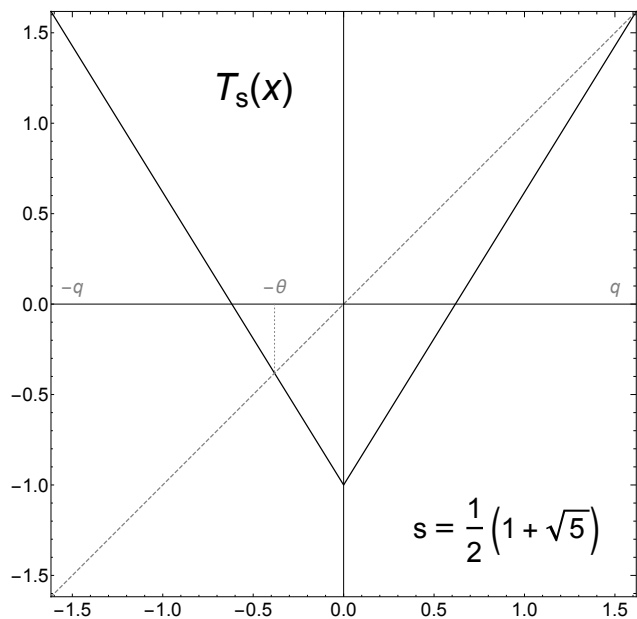
En déduire que, dans ce cas, $h(f_c) = \ln s$.

- (b) Pour $s \in]1, 2]$, on dit que T_s est renormalisable d'ordre $n \geq 2$ s'il existe un intervalle I centré en 0 et un paramètre $s' \in]1, 2]$ tels que $T_s^n : I \rightarrow I$ soit conjuguée à $T_{s'}$ et que les intérieurs de $I, T_s(I), \dots, T_s^{n-1}(I)$ soient disjoints. Montrer que dans ce cas $s' = s^n$. Si $s \in]1, \sqrt{2}]$, montrer que T_s est renormalisable d'ordre 2. En déduire que T_s est n fois renormalisable d'ordre 2 si et seulement si $s \in]1, 2^{2^{-n}}]$. Montrer que les seuls ordres de renormalisation possibles des applications T_s sont les puissances de 2.
- (c) (*question difficile*) On suppose que $\overline{C_c} \neq [-p, p]$. On admet qu'il existe $J = [-r, r]$ et un entier $n \geq 3$ qui n'est pas une puissance de 2, tel que $f_c^n(J) \subseteq J$, $f_c^n(\partial J) \subseteq \partial J$ et que les ensembles $J, f_c(J), \dots, f_c^{n-1}(J)$ soient disjoints. On suppose que n est minimal avec ces propriétés. On pose $W := \bigcup_{k \geq 0} f_c^{-k}(J)$. Observer que $C_c \subseteq W$. On admet que $\overline{W} = [-p, p]$ et qu'il existe $s \in]1, 2]$ tel que $T_s^n(0) = 0$ avec $\operatorname{sgn}(f_c^i)'(c) = \operatorname{sgn}(T_s^i)'(-1)$ pour tout $i = 0, \dots, n-2$.

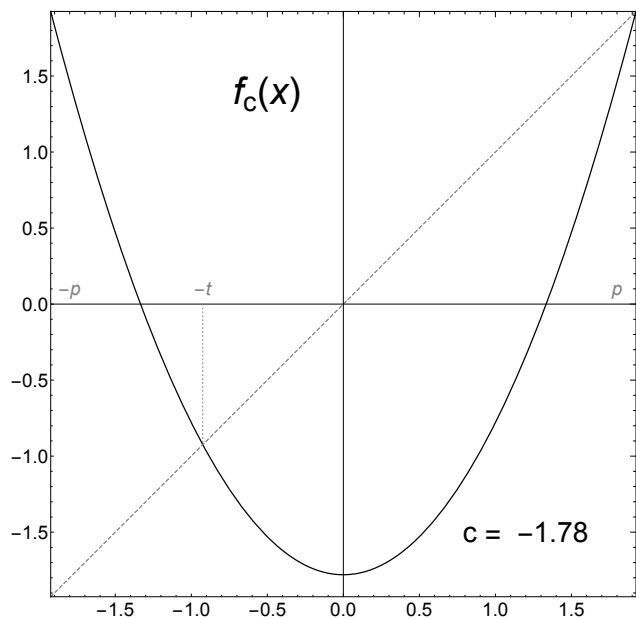
Montrer qu'il existe une application monotone, injective $g : [-q, q] \rightarrow [-p, p]$ telle que $\overline{\operatorname{Im} g} = \partial W$ et satisfaisant à la condition (7.2). On dit que g est une semi-conjugaison entre T_s et f_c .

- (d) (*question très difficile*) Montrer que, dans ce cas, on a encore $h(f_c) = \ln s$.

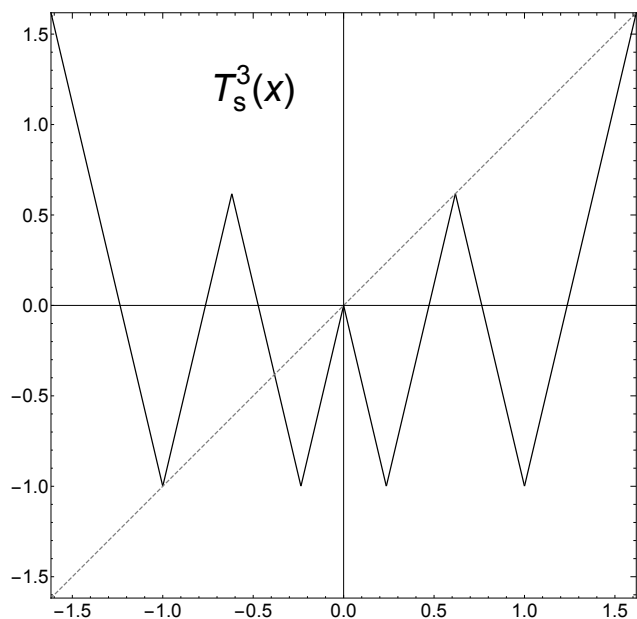
Avec un peu plus de travail (non demandé ici) on peut montrer que pour tout $c \in [-2, c_F[$, f_c est conjuguée ou semi-conjuguée à T_s avec $s = e^{h(f_c)}$. On obtient alors que pour tout $c \in [-2, c_F[$, le point $e^{-h(f_c)}$ est le premier zéro de la fonction $D_c(t) = \sum_{i \geq 0} t^i \operatorname{sgn}(f_c^i)'(c)$. C'est une variante de la formule de Milnor et Thurston.



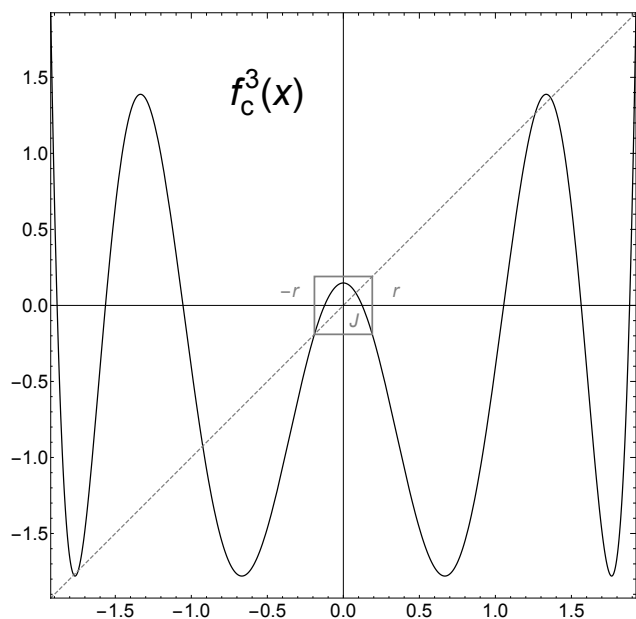
T_s avec $T_s^3(0) = s^2 - s - 1 = 0$.



f_c avec $c = -1.78$.



$h(T_s) = \ln s$.



f_c semi-conjugée à T_s , $h(f_c) = \ln s$.

Solution.

(1) Modèle : étude des applications “tente” T_s

(a) *Entropie de T_s*

La variation totale d’une fonction g de classe $C^1(a, b)$ par morceaux est donnée par

$$\text{Var}(g) = \int_a^b |g'(t)| dt.$$

On observe que pour $x \neq 0$, $T_s'(x) = s \operatorname{sgn}(x)$. Par convention, $T_s'(0) = \operatorname{sgn}(0) = 0$. On a alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$,

$$(T_s^n)'(x) = s^n \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(T_s(x)) \dots \operatorname{sgn}(T_s^{n-1}(x)). \tag{7.3}$$

On a donc $\frac{1}{n} \ln \text{Var}(T_s^n) = \frac{1}{n} \ln(2qs^n) = \ln(s) + o(1)$ et (7.1) entraîne $h(T_s) = \ln s$.

(b) *Calcul explicite et cas polynomial*

On observe que $T_s(x) = sx \operatorname{sgn}(x) - 1$. Dans le calcul de la composée, on peut alors exprimer les produits de signes de façon compacte à l’aide de (7.3) :

$$\begin{aligned} T_s^2(x) &= sT_s(x) \operatorname{sgn}(T_s(x)) - 1 \\ &= s((sx \operatorname{sgn}(x) - 1) \operatorname{sgn}(T_s(x))) - 1 \\ &= s^2x \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(T_s(x)) - s \operatorname{sgn}(T_s(x)) - 1 \\ &= s^2x \operatorname{sgn}(T_s^2)'(x) - s \operatorname{sgn}(T_s'(T_s(x))) - 1. \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient une formule explicite pour tout entier $n \geq 1$

$$\begin{aligned} T_s^n(x) &= s^n x \operatorname{sgn}(T_s^n)'(x) - s^{n-1} \operatorname{sgn}(T_s^{n-1})'(T_s(x)) - \dots \\ &\quad - s \operatorname{sgn}(T_s')(T_s^{n-1}(x)) - 1. \end{aligned} \tag{7.4a}$$

i.e.

$$T_s^n(x) = s^n x \operatorname{sgn}(T_s^n)'(x) - \sum_{j=1}^{n-1} s^j \operatorname{sgn}(T_s^j)'(T_s^{n-j}(x)) - 1 \tag{7.4b}$$

Supposons que $T_s^{m+1}(0) = 0$ et que $m \geq 0$ est le plus petit entier avec cette propriété. Alors $T_s^m(-1) = 0$ mais $T_s^i(-1) \neq 0$ pour tout $i = 0, \dots, m$ donc, par (7.3), $d_i = \operatorname{sgn}(T_s^i)'(-1) \neq 0$. Toujours d’après (7.3), on observe alors que

$$\operatorname{sgn}(T_s^{m-i})'(T_s^i(-1)) = d_m/d_i = d_m d_i.$$

L’identité $T_s^{m+1}(0) = 0$ devient donc

$$d_m d_0 s^m + d_m d_1 s^{m-1} + \dots + d_m d_{m-1} s + d_m^2 = 0. \tag{7.5}$$

Comme $d_m \neq 0$, on obtient donc $D_s(1/s) = 0$.

(c) *Dépendance en le paramètre*

Observons que $\phi_1(s) = -1$, $\phi_2(s) = s - 1$. Pour $n \geq 3$, on a $\phi_n(s) = T_s^n(0) = T_s(\phi_{n-1}(s))$ donc

$$\phi_n'(s) = (\partial_s T_s)(\phi_{n-1}(s)) + \phi_{n-1}'(s) T_s'(\phi_{n-1}(s)) = |\phi_{n-1}(s)| + \phi_{n-1}'(s) T_s'(\phi_{n-1}(s)),$$

donc $\phi_n'(s)$ est bien définie si $\phi_{n-1}'(s)$ l’est et $\phi_{n-1}(s) \neq 0$. Par récurrence, ϕ_n est donc dérivable en s si et seulement si $\phi_k(s) \neq 0$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$ (i.e. tant que l’orbite du point critique ne revient pas en zéro).

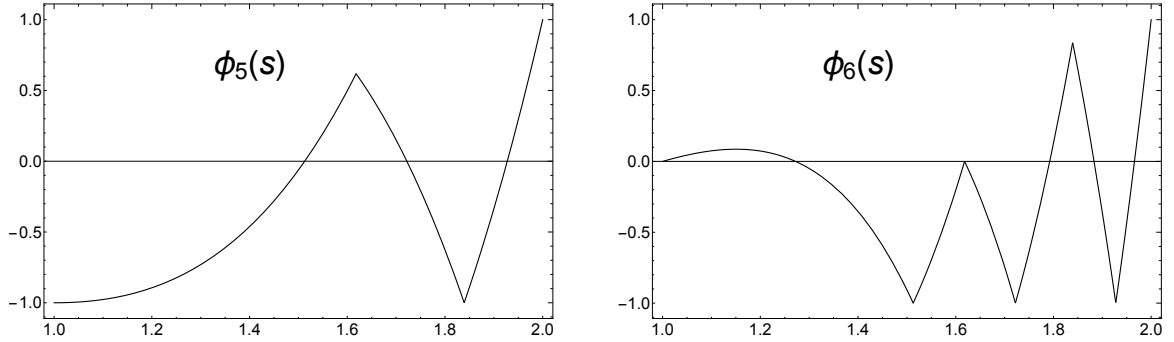
Par la formule précédente de $\phi'_n(s)$, on a aussi que pour tout $n \geq 3$ et $s \in]1, 2[$

$$\left| |\phi'_n(s)| - s|\phi'_{n-1}(s)| \right| \leq q.$$

Par récurrence, si $k > n$,

$$\left| |\phi'_k(s)| - s^{k-n}|\phi'_n(s)| \right| \leq q \frac{s^{k-n} - 1}{s - 1} < q^2 s^{k-n},$$

d'où on déduit les deux dernières affirmations.



- (d) *Cas holomorphe (preuve directe, trouvée par les équipes Gaël & Remi, Aleph et Bestial)*
Les identités (7.4b)-(7.5) deviennent cette fois :

$$T_s^{n+1}(0) = - \sum_{k=0}^n d_n d_{n-k} s^k \in [-q, q].$$

En multipliant par $-d_n/s^n$ et changeant k en $n-k$, on obtient :

$$\left| \sum_{k=0}^n d_{n-k} s^{-(n-k)} \right| = \left| \sum_{k=0}^n d_k s^{-k} \right| = \left| \frac{d_n T_s^{n+1}(0)}{s^n} \right| \leq \frac{q}{s^n} \rightarrow 0.$$

En passant à la limite, on obtient $D_s(1/s) = 0$.

Cas holomorphe (seconde preuve)

On traite le cas $s = 2$ à part. Comme $T_2(-1) = 1 = T_2(1)$, alors (7.3) donne $D_2(t) = 1 - t - t^2 - t^3 - \dots = 1 - \frac{t}{1-t}$, donc $D_2(1/2) = 0$.

Supposons que $T_s^n(0) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ avec $s \in]1, 2[$. On fixe $\epsilon > 0$ et on va montrer que $|D_s(1/s)| < \epsilon$.

On fixe d'abord $s_0 \in]1, s[$ et on note $U_n =]a_n, b_n[$ l'intervalle maximal de définition de ϕ'_n contenant s avec $a_n \geq s_0$; par 1c, il existe $1 \leq k_n < n$ minimal t.q. $T_{b_n}^{k_n}(0) = 0$ (sinon ϕ_n serait dérivable en b_n). Par 1b, D_{b_n} est un polynôme de degré $k_n - 1$ et $D_{b_n}(1/b_n) = 0$. Par l'inégalité admise dans l'énoncé en 1c, il existe $C, N > 0$ t.q. $C^{-1}s^n < |\phi'_n(s)| < Cs^n$ si $n \geq N$. Comme $T_s([-q, q]) \subseteq [-q, q] \subseteq [-1/(s_0 - 1), 1/(s_0 - 1)]$, on a

$$C^{-1}s_0^n(b_n - a_n) \leq \int_{a_n}^{b_n} |\phi'_n(s)| ds = |\phi_n(b_n) - \phi_n(a_n)| \leq \frac{2}{s_0 - 1}$$

et on en déduit que

$$b_n - a_n \leq \delta_n := \frac{2C}{s_0^n(s_0 - 1)}.$$

On observe $a_n, b_n \rightarrow s$ donc que si n est assez grand, $a_n > s_0$ et $b_n < 2$.

Fixons $M \geq 1$ suffisamment grand pour que

$$\sum_{k \geq M} s_0^{-k} < \frac{\epsilon}{4}, \tag{7.6}$$

$$M^2 \delta_M < \frac{\epsilon}{2}. \tag{7.7}$$

On choisit $n \geq N$ t.q. l'équation $\phi_k(s) = 0$ n'ait pas de solution sur $\overline{U_n}$ pour aucun $k \leq M$. En particulier $k_n > M$ et $\deg D_{b_n} = k_n - 1 \geq M$ donc D_{b_n} est le $DL_{k_n-1}(0)$ de D_s (les coefficients sont les mêmes car aucun des ϕ_k avec $k \leq k_n - 1$ ne s'annule, donc il ne peut pas changer de signe). Désignons par P le $DL_M(0)$ de D_s . Par l'inégalité (7.6), on obtient

$$\begin{aligned} |D_s(s^{-1})| &= |D_s(s^{-1}) - D_{b_n}(b_n^{-1})| \\ &\leq |P(s^{-1}) - P(b_n^{-1})| + |(D_s - P)(s^{-1})| + |(D_{b_n} - P)(b_n^{-1})| \\ &< |P(s^{-1}) - P(b_n^{-1})| + 2 \sum_{k \geq M} s_0^{-k} \quad \text{car } s_0 < s < b_n \\ &< |P(s^{-1}) - P(b_n^{-1})| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs $|d_k s^{-k} - d_k b_n^{-k}| = |s^{-1} - b_n^{-1}| \underbrace{|\sum_{i=0}^{k-1} s^{i+1-k} b_n^{-i}|}_{< 1} < k \delta_m$ et l'inégalité (7.7) donne

$$|P(s^{-1}) - P(b_n^{-1})| < M^2 \delta_M < \frac{\epsilon}{2}.$$

On peut ainsi conclure que $D_s(1/s) = 0$.

(2) Applications quadratiques : cas conjugué à T_s

- (a) Nous allons faire une preuve constructive de l'existence de g . L'idée est que la rigidité imposée par les signes fournit un canevas qui impose les valeurs de la conjugaison aux préimages de zéro qui, par hypothèse, est un sous-ensemble dense de $[-p, p]$.

On commence par l'observation que $T_s(-q) = T_s(q) = q$ et $f_c(-p) = f_c(p) = p$. Par la définition (7.2) de g , on doit avoir $g(q) = p$ et donc $g(-q) = -p < g(q)$. Comme g doit être un homeomorphisme, elle est nécessairement strictement croissante.

En composant par f_c à gauche (ou bien par T_s à droite) dans (7.2), on obtient

$$g \circ T_s^n = f_c^n \circ g,$$

donc g envoie les intervalles de monotonie de T_s^n sur les intervalles de monotonie de f_c^n (composée d'applications monotones). En particulier, pour $n = 1$, on en déduit que $g(0) = 0$, puis que pour tout $n \geq 0$:

$$T_s^n(x) = 0 \text{ si et seulement si } f_c^n(g(x)) = 0.$$

Pour $n \geq 1$, soient $S_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} T_s^{-i}(0)$ et $C_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} f_c^{-i}(0)$. On a $S_1 = C_1 = \{0\}$. Comme $T_s(0) < 0 < T_s(\pm q)$ et $f_c(0) < 0 < f_c(\pm p)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $|S_2| = |C_2| = 3$, où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A . Nous allons utiliser ce principe pour montrer par récurrence que $|S_n| = |C_n|$.

Un intervalle de monotonie $I = [a, b]$ de T_s^n est borné par des points $a, b \in S_n \cup \{-q, q\}$ (en effet, au voisinage des autres points, on compose des applications monotones). De

même, I est aussi un intervalle de monotonie de T_s^{n+1} si et seulement si $]a, b[\cap S_{n+1} = \emptyset$, ce qui (par théorème des valeurs intermédiaires) équivaut aussi à

$$T_s^n(a) T_s^n(b) \geq 0.$$

Si $a \in \{-q, q\}$ (ou bien $b \in \{-q, q\}$), on a $T_s^n(a) = q$ (resp. $T_s^n(b) = q$) et dans ces deux cas $T_s^n(a) > 0$. Au contraire, si $a, b \notin \{-q, q\}$, il existe $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ t.q. $T_s^k(a) = 0$ et $T_s^l(b) = 0$. Comme (par hypothèse et (7.3)) pour tout $i > 0$, $T_s^i(0) = T_s^{i-1}(-1) \neq 0$, on en déduit que $T_s^n(a) \neq 0 \neq T_s^n(b)$; en effet, $T_s^n(a) = T_s^{n-k}(0)$ et $T_s^n(b) = T_s^{n-l}(0)$. Par conséquent, comme $T_s(0) = -1$, la condition $]a, b[\cap S_{n+1} = \emptyset$ est équivalente (lorsque $\{a, b\} \cap \{-q, q\} \neq \emptyset$) à

$$\operatorname{sgn}(T_s^{n-1-k}(-1)) = \operatorname{sgn}(T_s^{n-1-l}(-1)). \quad (7.8)$$

Cette analyse peut être reproduite à l'identique pour f_c et $C_n \cup \{-p, p\}$. Comme pour tout $i \geq 0$, $\operatorname{sgn}(f_c^i)'(c) = \operatorname{sgn}(T_s^i)'(-1) \neq 0$, les relations (7.3) et (7.8) montrent que les ensembles $S_n, S_{n+1} \setminus S_n$ et $C_n, C_{n+1} \setminus C_n$ ont la même structure relative pour tout $n \geq 1$. On peut ainsi définir une suite croissante des bijections croissantes $g_n : S_n \rightarrow C_n$. Comme $T_s(S_n) \subseteq S_{n-1} \cup \{-1\}$, toujours par récurrence, pour tout $x \in S_n \setminus \{0\}$, on a

$$g_n \circ T_s(x) = f_c \circ g_n(x). \quad (7.9)$$

On observe enfin que $\bigcup_{n \geq 1} S_n$ est dense dans $[-q, q]$ car $|(T_s^n)'| = s^n \rightarrow \infty$ sur chaque intervalle de $[-q, q] \setminus S_n$; mais T_s^n est monotone sur chacun de ces intervalle et $\operatorname{Im} T_s^n \subseteq [-q, q]$ reste bornée. On obtient g comme limite des g_n : pour $x \in]-q, q[\setminus \bigcup_{n \geq 1} S_n$, on a deux suites adjacentes $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ t.q pour tout n assez grand, $x \in]a_n, b_n[$ et $a_n, b_n \in S_n$. On pose

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(b_n).$$

Cette définition est cohérente car $]g_n(a_n), g_n(b_n)[\subseteq [-p, p] \setminus C_n$ et $C_c = \bigcup_{n \geq 1} C_n$ est dense dans $[-p, p]$ par hypothèse. En passant à la limite dans la relation (7.9), on voit que g est une conjugaison entre T_s et f_c .

Observons que $\operatorname{Mon}(f_c^n) = \operatorname{Mon}(T_s^n)$ pour tout $n \geq 1$, donc $h(f_c) = h(T_s) = \ln s$.

Applications quadratiques : cas semi-conjugué à T_s . L'idée de la partie restante du problème est que certaines applications quadratiques ne peuvent pas être conjuguées à des applications tentes (à cause d'une inconsistance dans les ordres possibles de renormalisation). Cependant, une semi-conjugaison est possible, qui n'affecte pas le terme principal dans le calcul de l'entropie. On note $q_s = 1/(s-1)$.

(b) *Renormalisation des applications tente*

Soit T_s renormalisable d'ordre m sur un intervalle I . Alors $\operatorname{Var}(T_s^{mn}) = s^{mn} |I|$, où $|I|$ est la longueur de l'intervalle I . D'autre part, un calcul direct donne $\operatorname{Var}(T_{s'}^n) = 2q_{s'} (s')^n$. Comme T_s^m et $T_{s'}$ sont conjuguées, par la formule (7.1) on a

$$m \ln s = h(T_s^m) = h(T_{s'}) = \ln s',$$

d'où $s' = s^m$.

Soit $s \in]1, \sqrt{2}]$ et $-\theta < 0$ un point fixe de T_s . Alors $-\theta = T_s(-\theta) = s\theta - 1$, d'où $\theta = 1/(s+1)$. On a $T_s^2(-\theta) = -\theta$. La deuxième valeur critique $T_s^2(0) = T_s(-1) = s-1$ appartient à $[-\theta, \theta]$ ssi $\theta \geq s-1$, ce qui est le cas car $s \leq \sqrt{2}$. Comme $T_s^{-1}(0) = \{-1/s, 1/s\}$,

on voit que T_s^2 a deux branches monotones sur $I := [-\theta, \theta]$, $T_s^2(-\theta) = T_s^2(\theta) = -\theta$ et $T_s^2([-\theta, \theta]) \subseteq [-\theta, \theta]$. Soit $g : [-\theta, \theta] \rightarrow [-q_{s^2}, q_{s^2}]$ définie par $g_s(x) = (-q_{s^2}/\theta)x = -x/(s-1)$. Pour $x \in [-\theta, \theta]$, on obtient

$$\begin{aligned} T_s^2(x) &= -sT_s(x) - 1 = -s(s|x| - 1) - 1 = -s^2|x| + s - 1 \\ &= -(s-1)T_{s^2}\left(\frac{-x}{s-1}\right) = g_s^{-1} \circ T_{s^2} \circ g_s(x), \end{aligned}$$

donc T_s est renormalisable d'ordre 2.

Inversement, supposons que pour $s \in]\sqrt{2}, 2]$, T_s soit renormalisable d'ordre $n \geq 2$ sur un intervalle I . Alors T_s^n a (exactement) deux branches monotones de dérivées $\pm s^n$. Comme $s^n \geq s^2 > 2$, on aurait $T_s^n(I) \not\subseteq I$, une contradiction.

Fixons maintenant $s \in]1, \sqrt{2}]$. Supposons que T_s est renormalisable d'ordre $n > 2$ sur un intervalle I fermé. Comme $-\theta$ est un point fixe de T_s et les intérieurs de I et $T_s(I)$ sont disjoints (par hypothèse), $-\theta$ ne se trouve pas à l'intérieur de I . Autrement dit, $I \subseteq [-\theta, \theta]$. Observons que $T_s([-\theta, \theta]) = [-1, -\theta]$. Ainsi, $T_s^n(I) \subseteq I$ ssi n est pair, sinon $T_s^n(I) \subseteq [-1, -\theta]$. On a ainsi $T_s^n = g_s^{-1} \circ T_{s^2}^{n/2} \circ g_s$ donc $g_s(I)$ est un intervalle de renormalisation de T_{s^2} d'ordre $n/2$. Par récurrence, n est une puissance de 2.

En particulier, lorsque $s \in]2^{2^{-n-1}}, 2^{2^{-n}}]$, l'application T_s est exactement n fois renormalisable d'ordre 2.

(c) *Construction de la semi-conjugaison*

On observe que si un intervalle $I \subseteq [-p, p]$ est tel que $0 \notin I \cup f_c(I) \cup f_c^2(I) \cup \dots \cup f_c^{k-1}(I)$, alors f_c^k est monotone sur I . En particulier, avec les hypothèses de cette question, f_c^n a exactement deux branches monotones sur J .

Montrons que, pour chaque composante connexe I de W , il existe $m(I) \geq 0$ t.q. $f_c^{m(I)}(I) \subseteq J$ et pour tout $0 \leq k < m(I)$, $f_c^k(I) \cap J = \emptyset$. Cela impliquera que $f_c^{m(I)}$ est monotone sur I et que $f_c^{m(I)}(I) = J$.

Soient $1 \leq k < m$ et I et L deux intervalles fermés maximaux tels que $f_c^k(I) \subseteq J$ et $f_c^m(L) \subseteq J$, et $I, f_c(I), \dots, f_c^{k-1}(I)$ sont disjoints de J . Si $I \cap L \neq \emptyset$, alors $L \subseteq I$ et $m-k$ est un multiple de n . En effet, si $x \in I \cap L$ et $y := f_c^k(x) \in J$, on a aussi $f_c^{m-k}(y) = f_c^m(x) \in J$. Par l'hypothèse de minimalité, n divise $m-k$.

Supposons que $L \not\subseteq I$, alors il existe $x \in \partial I$ tel que $x \in \overline{L \setminus I}$. Donc, par le choix de k , f_c^k est monotone sur I donc $f_c^k(x) \in \partial J$. De plus $f_c^m(x) \in \partial J$ car n divise $m-k$ et $f_c^n(\partial J) \subseteq \partial J$. Comme f_c^m est monotone sur un voisinage de x et $f_c^m(I) \subseteq J$, cela contredit le fait que $f_c^m(L) \subseteq J$. En effet, soit $y \in L \setminus I$, proche de x , alors $f_c^m(y) \notin J$ par monotonie de f_c^m .

On définit une relation d'équivalence sur $[-p, p]$ par $x \sim y$ ssi $[x, y] \subseteq W$ ou $x = y$. Autrement dit $X := [-p, p]/\sim$ écrase les composantes connexes de W en points. Sur X , on obtient la topologie et l'ordre induits par celles de $[-p, p]$. Remarquons que $f_c(W) \subseteq W$ (car $f_c^n(J) \subseteq J$ donc $f_c(J) \subseteq f_c^{-(n-1)}(J)$) et $f_c^{-1}(W) \subseteq W$, donc f_c induit une application $\tilde{f}_c : X \rightarrow X$ avec deux branches monotones (avec un minimum en $\hat{0}$).

Par l'hypothèse, $\tilde{f}_c^n(\hat{0}) = \hat{0}$ et $\bigcup_{j \geq 0} \tilde{f}_c^{-j}(\hat{0})$ est dense dans X car $\overline{W} = [-p, p]$. On peut reprendre la construction de la question 2 pour obtenir une conjugaison $\tilde{g} : [-q, q] \rightarrow X$

entre T_s et \tilde{f}_c ,

$$\tilde{g} \circ T_s = \tilde{f}_c \circ \tilde{g}.$$

Comme $T_s^n(0) = 0$ et $\tilde{f}_c^n(\hat{0}) = \hat{0}$, les calculs des signes des deux orbites critiques (7.8) se feront pour des itérées modulo n .

Soit $u : X \rightarrow [-p, p]$ t.q. pour tout $\hat{x} \in X$, $u(\hat{x}) \sim x$ une application de choix d'un représentant. Il suffit de préciser u pour tout $x \in W$. Comme $f_c^n(\partial J) \subseteq \partial J$ et f_c^n a deux branches monotones sur J , f_c^n possède un seul point fixe $o \in \partial J$. On pose $u(\hat{0}) = o$ et pour toute composante I de W , $u(I) = f_c^{-m(I)}(o)$. On a (vérifier pour $\hat{0}$)

$$u \circ \tilde{f}_c = f_c \circ u.$$

Comme \tilde{g} conjugue T_s à \tilde{f}_c , on obtient

$$(u \circ \tilde{g}) \circ T_s = f_c \circ (u \circ \tilde{g}).$$

(d) *Calcul de l'entropie*

Montrons d'abord que $h(f_c) \geq \ln s$. Il suffit d'observer que pour tout $k \geq 1$, $\text{Mon}(f_c^k) \geq \text{Mon}(T_s^k)$. En effet, $\text{Mon}(T_s^k) = \text{Mon}(\tilde{f}_c^k)$, ce qui est une borne inférieure de $\text{Mon}(f_c^k)$ car par passage au quotient, en écrasant des composantes connexes de W , on ne peut pas créer des nouvelles branches monotones des itérées de \tilde{f}_c .

Pour montrer l'inégalité réciproque, on trouve une borne supérieure de $\text{Mon}(f_c^k) - \text{Mon}(\tilde{f}_c^k)$. Soit I une composante connexe de W . Si $m(I) \geq k$, f_c^k est monotone sur I . Les orbites des points de ∂I (qui finissent sur un point périodique de ∂J) ne contiennent pas le point critique 0. Alors si f_c^k est monotone sur I , I se trouve à l'intérieur d'une branche de monotonie de f_c^k . Autrement dit, I n'a aucune contribution à $\text{Mon}(f_c^k) - \text{Mon}(\tilde{f}_c^k)$.

Rappelons que $f_c^n(J) \subseteq J$ et que $\text{Mon}(f_c^n|_J) = 2$ d'après la remarque au début de 3b. Comme en général,

$$\text{Mon}(u \circ v) \leq \text{Mon}(u) \text{Mon}(v),$$

on obtient

$$\text{Mon}(f_c^k|_J) \leq 2^{[(k-1)/n]+1},$$

où $[x]$ est la partie entière de x . Comme $f_c^{m(I)}$ est monotone sur I , on a que pour toute composante I de W et tout $k \geq m(I)$,

$$\text{Mon}(f_c^k|_I) \leq 2^{[(k-1-m(I))/n]+1}.$$

On en déduit facilement que pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \text{Mon}(f_c^k) - \text{Mon}(\tilde{f}_c^k) &\leq \sum_{\substack{m(I) \leq k \\ k}} 2^{[(k-1-m(I))/n]+1} \\ &= \sum_{j=0}^k |\{I : m(I) = j\}| 2^{[(k-1-j)/n]+1} \\ &= \sum_{j=0}^k \text{Mon}(\tilde{f}_c^j) 2^{[(k-1-j)/n]+1}. \end{aligned}$$

On peut donc estimer directement

$$\begin{aligned} h(f_c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \text{Mon}(f_c^k) \\ &\leq \max \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \text{Mon}(\tilde{f}_c^k), \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left(\text{Mon}(f_c^k) - \text{Mon}(\tilde{f}_c^k) \right) \right) \\ &\leq \max \left(\ln s, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\ln k + \ln \max_{0 \leq j \leq k} \text{Mon}(\tilde{f}_c^j) 2^{[(k-1-j)/n]+1} \right) \right). \end{aligned}$$

On suppose pour l'instant que $s > \sqrt{2}$, donc T_s n'est pas renormalisable d'ordre 2. Comme $n > 2$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln 2^{[(k-1)/n]+1} \leq \ln 2^{1/3} < \ln s$. D'autre part $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \text{Mon}(\tilde{f}_c^k) = \ln s$ car \tilde{f}_c^k est conjuguée à T_s . On en conclut que

$$h(f_c) \leq \ln s. \tag{7.10}$$

Il reste à traiter le cas $s \in]1, \sqrt{2}]$. Soit $t > 0$ avec $f_c(-t) = -t$ et $J' = [-t, t]$. Montrons d'abord que $f_c^2(J') \subseteq J'$. On a $f_c(J') = [c, -t]$ et $f_c^2(J') = [-t, f_c^2(0)]$. Il suffit donc de montrer que $f_c^2(0) \leq t$. Par la question 3a, on sait que T_s est renormalisable d'ordre 2.

Si $-\theta < 0$ est le point fixe de T_s , $T_s^2([- \theta, \theta]) \subseteq [- \theta, \theta]$ et, par conséquent, $T_s^2(0) \leq \theta$. Comme T_s et \tilde{f}_c sont conjuguées par la question 3b et $-\theta$ et $-t$ sont leur uniques points fixes négatifs, on a $\tilde{g}(-\theta) = -\hat{t}$ et, par symétrie, $\tilde{g}(\theta) = \hat{t}$. Cela implique $\tilde{f}_c^2(\hat{0}) \leq \hat{t}$. Si $\hat{x} \leq \hat{y}$, on peut conclure que $x \leq y$ si une des classes est un singleton, i.e. $\hat{x} = \{x\}$ ou bien $\hat{y} = \{y\}$.

Si $t \in W$, alors une image $f_c^k(-t) = -t \in J$ et donc $f_c(-t) = -t \in f_c(J)$, une contradiction. Cela montre que \hat{t} est un singleton et par $\tilde{f}_c^2(\hat{0}) \leq \hat{t}$ on peut conclure que $f_c^2(0) \leq t$. Soit $t_0 := t$. Comme pour tout $x \in [0, p[$, $f_c(x) < x$, pour tout $k \geq 1$, il existe $t_k > t_{k-1}$ t.q. $f_c(t_k) = t_{k-1}$. Par symétrie, on a aussi que $f_c(-t_k) = t_{k-1}$. Il est immédiat que $t_k \rightarrow p$ quand $k \rightarrow \infty$ et que $[-p, -t_k[, [-t_k, -t_{k-1}[, \dots, [-t_1, -t_0[, J',]t_0, t_1], \dots,]t_k, p]$ forment une partition de $[-p, p]$. Soit $J_0 := J'$, $J_k := [t_{k-1}, t_k]$ et $-J_k := [-t_k, -t_{k-1}]$ pour tout $k \geq 1$.

Pour tout $j \geq 1$, on a $f_c(-J_j) = f_c(J_j) = J_{j-1}$. Ainsi, f_c^j est monotone sur J_j et sur $-J_j$ (et aussi sur $[-p, -t_{j-1}]$ et sur $[t_{j-1}, p]$). Pour tout $k \geq 1$, on peut donc borner, toujours par symétrie et en utilisant que $\text{Mon}(f_c^{2j}|_{J'}) = \text{Mon}(f_c^{2j+1}|_{J'})$:

$$\text{Mon}(f_c^k) \leq 2 \sum_{j=0}^k \text{Mon}(f_c^k|_{J_j}) = 2 \sum_{j=0}^k \text{Mon}(f_c^{k-j}|_{J'}) \leq 4 \sum_{\ell=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \text{Mon}(f_c^{2\ell}|_{J'}).$$

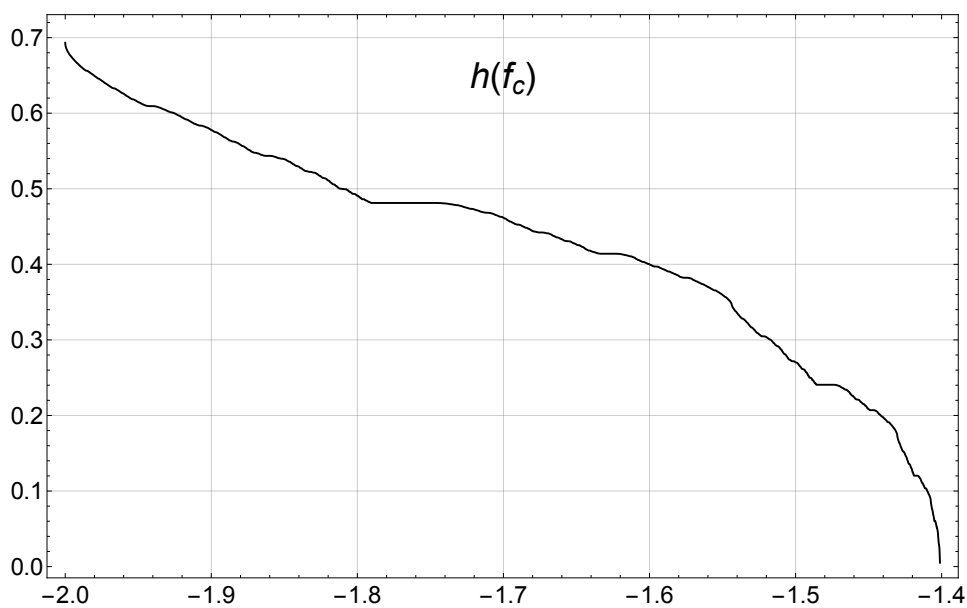
Nous avons vu que $h(f_c) \geq \ln s > 0$. De façon analogue, $f_c^2|_{J'}$, qui est semi-conjuguée à $T_s^2|_{[-\theta, \theta]}$ et donc à T_{s^2} , est d'entropie positive. Par la définition de l'entropie, le nombre de branches $\text{Mon}(f_c^{2\ell}|_{J'})$ a une croissance exponentielle en ℓ . On peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente, pour obtenir que

$$h(f_c) \leq \frac{1}{2} h(f_c^2|_{J'}).$$

Dans les preuves 3b et 3c, nous avons utilisé uniquement des propriétés topologiques de f_c . L'application $f_c^2|_{J'}$ est de la même nature, et après une éventuelle mise à l'échelle de son intervalle de définition, est la renormalisée de f_c d'ordre 2 (on pourrait en donner

une définition formelle, mais cela dépasse le cadre du problème). Nous avons réduit le problème à une renormalisation d'ordre $n/2$ de f_c où s est remplacé par s^2 et l'entropie est multipliée par 2. Par récurrence, il y a $m \geq 1$ et un intervalle $0 \in I$ stable par $f_c^{2^m}$ tels que $s^m > \sqrt{2}$, et par l'inégalité (7.10),

$$h(f_c) \leq \frac{1}{2^m} h(f_c^{2^m} | I) \leq \frac{1}{2^m} \ln s^{2^m} = \ln s.$$



$c \mapsto h(f_c)$ est continue, monotone et localement constante sur un ouvert dense.

8. THÉORIE DE LA MESURE

On note \mathbb{P} la mesure de probabilité d'un univers probabilisé de référence Ω (et ω un élément générique de Ω). Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *indépendantes* de Rademacher :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On note de plus $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *indépendantes* gaussiennes standard :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(g_n \leq t) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Un théorème de Marcus et Pisier (1977) affirme que les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour toute suite de coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- i) avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n(\omega) c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$;
- ii) avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(\omega) c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

On se propose ici de construire un contre-exemple particulier en dimension 2 qui fait écho au fait que les fonctions propres de certains opérateurs de type Laplacien peuvent avoir des propriétés de concentration.

On munit \mathbb{R}^2 de la norme $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$ et on note $B(M, r)$ les boules ouvertes associées (de centre $M \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$).

- (1) Considérons une suite réelle $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, strictement positive et vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^2 < +\infty$. Montrer qu'il existe une constante numérique explicite $C > 0$ et une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 telles que les boules ouvertes $B(M_n, r_n)$ vérifient les deux propriétés suivantes :

- les boules $B(M_n, r_n)$ sont disjointes,
- les boules $B(M_n, r_n)$ sont incluses dans une boule de rayon $C \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^2}$ (on ne demande pas de trouver la meilleure constante C).

- (2) Pour tout entier $T \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'on a

$$\sup_{N \geq 3} \sum_{n=N}^{2N} \mathbb{P}\left(\frac{g_n}{T} \geq \sqrt{\ln(\ln(n))}\right) = +\infty,$$

et en déduire à l'aide d'un lemme de Borel-Cantelli que l'on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 3} \left(\frac{|g_n|}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}\right) = +\infty\right) = 1.$$

- (3) Justifier l'existence d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'une suite de boules ouvertes disjointes $B(M_n, r_n)$ et incluses dans la boule fermée unité $\overline{B((0, 0), 1)}$ et enfin d'une suite de coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que si F_n est la fonction indicatrice de la boule ouverte $B(M_n, r_n)$ alors

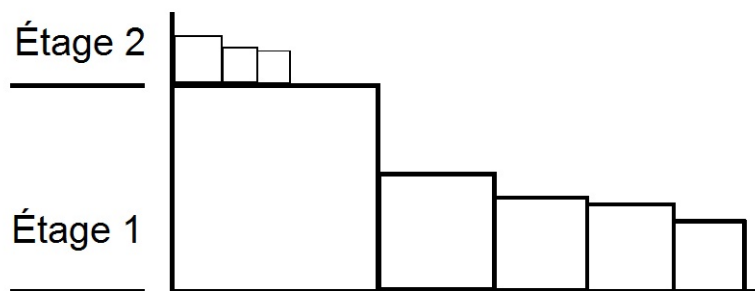
- avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n(\omega) c_n F_n(x)$ converge uniformément dans $\overline{B((0, 0), 1)}$.

- avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(\omega) c_n F_n(x)$ ne converge pas uniformément dans $\overline{B((0, 0), 1)}$.

Solution.

(1) Tout d'abord, il faut avoir à l'esprit que la boule ouverte $B(M, r)$ est un carré de côté $2r$ ou plutôt l'intérieur d'un carré égal à $]x - r, x + r[\times]y - r, y + r[$ avec $M = (x, y)$. La question demande donc d'injecter des carrés disjoints de côtés $2r_n$ dans un grand carré de côté $2C \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^2}$ avec $C > 0$ constante positive à déterminer plus tard. Pour simplifier, on notera dans la suite $R = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^2}$. Par comparaison de la somme des aires de carrés $B(M_n, r_n)$, c'est-à-dire $\sum_{n \in \mathbb{N}} 4r_n^2 = 4R^2$ avec celle du grand carré recherché d'aire $4C^2R^2$, on comprend que l'on doit avoir $C \geq 1$ (en termes plus sophistiqués, on vient d'invoquer la sous-additivité de la mesure de Lebesgue). Pour se donner un peu de marge, on va essayer de chercher C strictement plus grand que 1.

L'idée est la suivante : on aligne des carrés de côtés $2r_n$ jusqu'à ce que la somme des côtés dépasse $2CR$ pour former un premier étage. Les carrés supplémentaires seront mis dans un second étage jusqu'à épuisement de la borne $2CR$ et ainsi de suite. Il s'agit de prouver que cette méthode de construction d'immeubles fonctionne bien.



Examinons rigoureusement le premier étage. Le premier carré ⁵ $]0, 2r_0[\times]0, 2r_0[$ peut bien être mis dans le premier étage puisque $2r_0 < 2CR$. La construction du premier étage s'arrête avec n_1 carrés une fois que l'on aura trouvé le plus grand entier $n_1 \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ tel que

$$2r_0 + \dots + 2r_{n_1-1} \leq 2CR.$$

On s'attelle maintenant au second étage (c'est-à-dire si $n_1 < +\infty$) : on cherche le plus grand entier $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant $n_2 > n_1$ et tel que

$$2r_{n_1} + \dots + 2r_{n_2-1} \leq 2CR.$$

Dans le meilleur des cas, cette méthode fournit un nombre fini d'étages. Plaçons-nous dans le pire des cas avec un nombre infini d'étages (les estimations impliqueront le cas fini). Ainsi, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (en convenant $n_0 = 0$) vérifiant

$$\sum_{n_k \leq \ell < n_{k+1}} r_\ell \leq CR \quad \text{et} \quad \sum_{n_k \leq \ell \leq n_{k+1}} r_\ell > CR.$$

5. qui est, rappelons-le, une boule $B(M_0, r_0)$ pour un certain M_0 facile à expliciter par ailleurs !

La deuxième condition énonce seulement que n_{k+1} est le plus grand entier satisfaisant à la première condition.

Avec cette méthode, tous nos carrés sont placés dans la bande $[0, 2CR] \times [0, +\infty[$ et il s'agit de vérifier que l'immeuble (avec une infinité d'étages !) que nous construisons a une hauteur finie et contrôlée par un multiple de R . La somme des hauteurs des étages est manifestement :

$$2r_{n_0} + 2r_{n_1} + 2r_{n_2} + \dots = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2r_{n_k}$$

Pour contrôler cette hauteur, on commence par invoquer la décroissance de (r_n) :

$$\sum_{n_k \leq \ell < n_{k+1}} r_\ell^2 \geq r_{n_{k+1}} \sum_{n_k \leq \ell < n_{k+1}} r_\ell = r_{n_{k+1}} \left(\sum_{n_k \leq \ell \leq n_{k+1}} r_\ell \right) - r_{n_{k+1}}^2.$$

Or la seconde condition sur (n_{k+1}) assure que l'on a

$$\sum_{n_k \leq \ell < n_{k+1}} r_\ell^2 \geq CRr_{n_{k+1}} - r_{n_{k+1}}^2.$$

On va à présent exploiter l'idée que le terme quadratique $r_{n_{k+1}}^2$ peut moralement être contrôlé par le terme d'ordre 1 (quitte à modifier les constantes en jeu). On a en effet le lemme suivant :

Lemme 8.1. Pour tous $R > 0$ et $x \in [0, R]$ on a $xCR - x^2 \geq (C - 1)Rx$.

Démonstration. : on a $xCR - x^2 - (C - 1)Rx = Rx - x^2 = x(R - x) \geq 0$. □

On en déduit

$$\sum_{n_k \leq \ell < n_{k+1}} r_\ell^2 \geq (C - 1)R \times r_{n_{k+1}}$$

Par sommation sur k et en tenant compte de l'inégalité triviale $2r_{n_0} = 2r_0 \leq 2R$, on arrive à contrôler la hauteur de notre immeuble

$$\begin{aligned} 2r_{n_0} + 2r_{n_1} + 2r_{n_2} + \dots &\leq 2R + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} r_{n_{k+1}} \\ &\leq 2R + \frac{2}{(C - 1)R} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n_k \leq \ell < n_{k+1}} r_\ell^2 \\ &\leq 2R + \frac{2}{(C - 1)R} \times R^2 \\ &\leq \left(2 + \frac{2}{C - 1} \right) R. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $C > 1$, tous les carrés ont été injectés dans le rectangle $]0, 2CR[\times]0, (2 + \frac{2}{C-1})R[$ qui est inclus dans une boule de rayon $\max(C, 1 + \frac{1}{C-1})R$. Ce rayon est minimal pour $C = 2$ et vaut $2R$.

(2) Par décroissance des probabilités étudiées on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{2N} \mathbb{P}(g_n \geq T\sqrt{\ln(\ln(n))}) &\geq (N+1)\mathbb{P}(g_{2N} \geq T\sqrt{\ln(\ln(2N))}) \\ &\geq (N+1) \int_{T\sqrt{\ln(\ln(2N))}}^{+\infty} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Un équivalent du reste de l'intégrale de Gauss se calcule par exemple avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} e^{-x^2/2} dx &= \int_t^{+\infty} \frac{1}{x} \times x e^{-x^2/2} dx \\ &= \left[\frac{-1}{x} e^{-x^2/2} \right]_t^{+\infty} - \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^2} \times e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{e^{-t^2/2}}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^2} \times e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$

D'après les théorèmes de comparaison de fonctions définies par une intégrale, la seconde intégrale est négligeable face à la première. Si bien que

$$\int_t^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \sim \frac{e^{-t^2/2}}{t}$$

et donc pour tout entier $T \in \mathbb{N}^*$ fixé à l'avance, on a pour $N \rightarrow +\infty$ la limite

$$(N+1) \int_{T\sqrt{\ln(\ln(2N))}}^{+\infty} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \sim \frac{N}{\sqrt{2\pi} \times T\sqrt{\ln(\ln(2N))} \times (\ln(2N))^{T^2/2}} \rightarrow +\infty$$

Cela implique la réponse à la question demandée. Pour conclure, on remarque que ce qui précède implique la divergence de la série $\sum \mathbb{P}\left(\frac{g_n}{T} \geq \sqrt{\ln \ln(n)}\right)$. D'après le second lemme de Borel-Cantelli (version avec événements indépendants), on déduit que presque sûrement, les événements $\left(\frac{g_n}{T} \geq \sqrt{\ln \ln(n)}\right) = \left(\frac{g_n}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} \geq T\right)$ se produisent une infinité de fois. Comme T parcourt l'ensemble dénombrable \mathbb{N}^* et qu'une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1 est aussi de probabilité 1, on comprend que l'on vient de prouver que la variable aléatoire $\sup_{n \geq 3} \frac{|g_n|}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}$ est, presque sûrement, supérieure à tout entier $T \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 3} \frac{|g_n|}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} = +\infty\right) = 1.$$

(3) Vu la forme de la question 2), on a envie de tester $c_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}$ (parfaitement défini pour $n \geq 3$). Quitte à dilater les rayons et translater les centres M_n , la question 1 assure qu'il existe une suite de points M_n telle que les boules ouvertes $B(M_n, \frac{c}{n+1})$ (avec $c > 0$ suffisamment petit) soient disjointes et toutes incluses dans la boule fermée unité. On remarque alors que pour tous $n \geq 3$ et $\omega \in \Omega$ on a

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |g_n(\omega)c_n F_n(x)| = \frac{|g_n(\omega)|}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}.$$

La convergence uniforme devrait impliquer que le terme précédent tend vers 0. La question 2 assure que, presque sûrement, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(\omega) c_n F_n(x)$ ne converge pas uniformément sur la boule fermée unité.

Vérifions par contre que l'on a bien la convergence uniforme de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n(\omega) c_n F_n(x)$. En fait, il n'y a même pas besoin d'argument probabiliste. Examinons les paquets de Cauchy et exploitons le fait que les fonctions indicatrices F_n soient à support disjoints : pour tous entiers $q \geq p \geq 3$ on a

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \left| \sum_{n=p}^q \varepsilon_n(\omega) c_n F_n(x) \right| = \max\{c_p, c_{p+1}, \dots, c_q\} = \frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(p))}}.$$

Manifestement, la suite des paquets de Cauchy tend vers 0 pour $p \rightarrow +\infty$ et $q \rightarrow +\infty$. D'après le critère de Cauchy, cela implique bien la convergence uniforme de $\sum \varepsilon_n(\omega) c_n F_n$ sur la boule fermée unité.

Commentaires de l'auteur du sujet.

Sur l'ensemble des réponses reçues, cinq équipes (6991, ALEPH, Bestial, LLPro Yes, Madbeth) ont essentiellement obtenu une solution satisfaisante.

L'effort d'imagination était attendu pour la première question où il fallait proposer une façon de confiner (verbe devenu courant en 2020) des carrés de cotés $2r_n$ prescrits dans un espace restreint, à savoir un carré de coté $2C \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^2}$ avec C aussi petit que possible. Faisons quelques remarques sur la suite des rayons (r_n) :

- i) l'hypothèse de décroissance sur la suite (r_n) est une hypothèse de nature purement technique pour simplifier la rédaction. En effet, toute suite strictement positive qui tend vers 0 peut être permutée en une suite strictement positive décroissante qui tend également vers 0.
- ii) l'hypothèse $r_n > 0$ de l'énoncé n'était pas du tout indispensable et toutes les preuves reçues étaient valides dans le cas où l'on ne traite qu'un ensemble fini de carrés.
- iii) les équipes Bestial et LLpro Yes ont proposé d'abord de traiter le cas où les rayons sont des puissances de 2, puis se sont ramenées au cas général en injectant chaque carré de rayon r_n dans un carré de rayon dyadique $2^{a(n)}$, avec $a(n) \in \mathbb{Z}$, comme suit :

$$2^{a(n)-1} < r_n \leq 2^{a(n)}.$$

Cette approche est valide puisque les séries $\sum r_n^2$ et $\sum 2^{2a(n)}$ sont de même nature (et leur somme sont facilement comparables). L'approche dyadique donne lieu à une constante C qui est forcément supérieure au double de la meilleure constante possible puisque l'on choisit d'injecter chaque boule de rayon r_n dans une boule de rayon $2^{a(n)}$ même si r_n s'approche dangereusement de $2^{a(n)-1}$.

Discutons à présent de la meilleure constante trouvée parmi les réponses reçues. La constante $C = 2$ a été trouvée par les équipes Bestial (dans le cas diadique) et MadBeth dans le cas général. En l'occurrence la réponse de l'équipe Madbeth a permis à l'auteur du sujet un raffinement de sa solution initiale.

Mentionnons également que la solution de l'équipe Bestial propose une preuve rigoureuse du résultat suivant (par utilisation du lemme de Borel-Cantelli) :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{g_n}{\sqrt{2 \ln(n)}} = 1 \right) = 1$$

9. THÉORIE DES NOMBRES

Soit B un entier naturel strictement positif. Démontrer l'existence d'un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathbb{N} tel que pour tout nombre premier p chaque classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sauf une possède exactement B représentants dans \mathcal{S} .

Existe-t-il des valeurs de B pour lesquelles on peut choisir la classe avec une infinité de représentants arbitrairement dans les différents corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Solution.

Supposons d'abord $B = 1$. On va construire une suite strictement croissante $s_1 < s_2 < \dots$ d'entiers naturels avec les deux propriétés suivantes :

- Pour tout premier p et pour tout entier $n \geq 1$, il existe au plus une seule classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui possède plusieurs représentants dans $\{s_1, \dots, s_n\}$.
- Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout premier $p < n$, l'ensemble $\{s_1, \dots, s_n\}$ représente toutes les classes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Montrons que toute suite finie satisfaisant à ces deux conditions se prolonge : supposons s_1, \dots, s_n construits. Soit \mathcal{P}_n l'ensemble fini des nombres premiers qui divisent le discriminant $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (s_j - s_i)^2$ du polynôme $\prod_{i=1}^n (X - s_i)$. Remarquons que \mathcal{P}_n contient tous les nombres premiers strictement inférieurs à p car $\{s_1, \dots, s_n\}$ contient forcément au moins deux représentants dans une même classe si $p < n$.

Pour tout premier p de \mathcal{P}_n choisissons une classe α_p de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

Si $p \geq n$, on choisit pour α_p une classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non représentée par $\{s_1, \dots, s_n\}$ (comme une classe est représentée au moins deux fois par définition du discriminant, une telle classe existe également pour $p = n$). Pour $p < n$, la classe de α_p est l'unique classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ayant au moins deux représentants dans $\{s_1, \dots, s_n\}$. On prend alors pour s_{n+1} un entier naturel supérieur à s_n qui représente la classe de α_p pour tout premier p dans \mathcal{P}_n .

La preuve est complète en observant que toute suite (s_i) réduite à un élément satisfait aux deux conditions ci-dessus.

Si $B \geq 2$, on peut choisir arbitrairement la classe exceptionnelle e_p (représentée par un nombre infini d'éléments de \mathcal{S}) dans les différents corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En effet, on peut procéder similairement en changeant légèrement la détermination de la classe α_p pour p un diviseur premier du discriminant de $\prod_{i=1}^n (X - s_i)$.

Si $pB > n$, on choisit pour α_p une classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ayant moins de B représentants parmi $\{s_1, \dots, s_n\}$. Pour $pB \leq n$, on choisit pour α_p la classe exceptionnelle e_p de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Observons que l'utilisation du discriminant pour $B \geq 2$ sert uniquement à définir un ensemble fini de nombres premiers contenant tous les premiers pour lesquels il faut faire attention dans le choix de s_{n+1} .

Complément. On ne peut pas imposer la classe exceptionnelle (avec une infinité de représentants) dans les corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $B = 1$: En effet, il n'existe pas de sous-ensemble infini de \mathbb{N} n'ayant au plus qu'un unique représentant dans chaque classe inversible (non-nulle) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (pour tout premier p).

L'équipe l'UPP a donné une preuve de ce fait en utilisant un résultat de Hiroshi Kobayashi (On Existence of Infinitely Many Prime Divisors in a Given Set, Tokyo J. Math., Vol 4. No 2, 1981, 379–380, téléchargeable à : https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tjm/1270215162).

La preuve suivante, un peu plus détaillée, utilise essentiellement la même idée en ayant recours au célèbre résultat de finitude de Faltings :

Soit $\mathcal{S} = \{s_0, s_1, \dots\}$ un sous-ensemble infini de \mathbb{N} tel que pour tout nombre premier p , chaque classe non nulle de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a au plus un seul représentant dans \mathcal{S} .

Pour deux éléments distincts non-nuls s_i, s_j de \mathcal{S} , tout diviseur premier de $s_i - s_j$ doit également diviser s_i (et donc s_j).

Quitte à renuméroter l'ensemble \mathcal{S} , nous supposons que s_0 et s_1 sont deux éléments non-nuls (et distincts) de \mathcal{S} . Notons \mathcal{P} l'ensemble fini de tous les diviseurs premiers de $s_0 s_1$. Les translatés $\mathcal{S} - s_0$ et $\mathcal{S} - s_1$ de \mathcal{S} ne contiennent donc que des éléments du monoïde multiplicatif \mathcal{P}^* .

Choisissons pour tout p dans \mathcal{P} un entier a_p dans $\{0, 1\}$ et un entier b_p dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tels que

$$\mathcal{I} = \{n \mid \forall p \in \mathcal{P}, v_p(s_n - s_0) \equiv a_p \pmod{2}, v_p(s_n - s_1) \equiv b_p \pmod{5}\}$$

soit un ensemble infini. (Ici, $v_p(x)$ désigne l'exposant de la plus grande puissance de p qui divise x .)

Posons $A = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p}$ et $B = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p}$ et considérons la courbe affine \mathcal{C} d'équation

$$Ax^2 - By^5 = s_1 - s_0 .$$

C'est une courbe hyperelliptique de genre 2 dont le seul point singulier est le point à l'infini. Elle ne possède donc qu'un nombre fini de points dans \mathbb{Q}^2 par un résultat célèbre de Faltings.

Or pour tout n dans \mathcal{I} tel que $s_n > s_0$, le point entier

$$\left(\sqrt{\frac{s_n - s_0}{A}}, \sqrt[5]{\frac{s_n - s_1}{B}} \right)$$

appartient à \mathcal{C} , en contradiction avec Faltings.

10. TOPOLOGIE

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, muni de la topologie usuelle. Soit $f: E \rightarrow E$ une fonction, dont les itérés sont notés f^k , pour $k \in \mathbb{N}$ ($f^{k+1} = f \circ f^k$ et f^0 est l'identité).

On dit que f est une *dynamique faiblement bornée* sur E si f est continue et si toute orbite de f , c'est-à-dire tout ensemble de la forme $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $x \in E$, est incluse dans un compact de E . On dit que f est une *dynamique fortement bornée* sur E si f est continue et si pour tout compact K de E , l'union des itérés $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(K)$ est incluse dans un compact de E . Déterminer en fonction de n si toute dynamique faiblement bornée sur \mathbb{R}^n est nécessairement fortement bornée.

On pourra ensuite, si on le souhaite, s'intéresser à d'autres espaces topologiques.

Solution.

Nous allons d'abord traiter le cas $n = 1$ en montrant que toute dynamique faiblement bornée sur \mathbb{R} est en effet fortement bornée. Nous construirons ensuite un contre-exemple pour le cas $n = 2$, c'est-à-dire une dynamique faiblement bornée sur \mathbb{R}^2 qui n'est pas fortement bornée. Le contre-exemple se généralise facilement au cas $n > 2$.

Fixons d'abord quelques notations. Dans la suite, E sera toujours un espace topologique. Si F est un sous-ensemble de E , alors \bar{F} désignera son adhérence. De plus, si $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E , alors on dira que $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *diverge partiellement* (resp. *fortement*) si, pour tout compact K , il existe une infinité d'entiers k tels que $F_k \not\subset K$ (resp. $F_k \neq \emptyset$ et $F_k \cap K = \emptyset$). Observons que ces deux notions sont équivalentes lorsque les F_k sont des points (par un léger abus, on confond les points et les ensembles réduits à un point), et dans ce cas, on dira simplement que la suite *diverge*.

Cas $n = 1$

Commençons par étudier le cas $E = \mathbb{R}$. On raisonne par contraposition : on se donne $f : E \rightarrow E$ une fonction continue qui n'est pas une dynamique fortement bornée. Cela signifie qu'il existe un compact K_0 tel que $(f^k(K_0))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge partiellement.

L'idée de la preuve est de trouver une suite décroissante (pour l'inclusion) de compacts $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(f^k(P_k))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge fortement. On obtient alors par le théorème des compacts emboîtés un point x dans l'intersection $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_k$, et on vérifie que $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge ; ainsi f n'est pas une dynamique faiblement bornée sur \mathbb{R} .

On peut aisément constater que la suite $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$, définie par $F_k = f^k(K_0) \setminus f^{k-1}(K_0)$ pour $k \in \mathbb{N}$, diverge partiellement et que $(\overline{f^{-k}(F_k) \cap K_0})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides (la preuve est donnée dans un cas similaire plus loin). Toute la difficulté, maintenant, est de modifier K_0 et la suite $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour qu'elle diverge fortement au lieu de partiellement.

Reprenons la preuve. Si $(f^k(K_0))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge fortement, alors $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge pour tout point $x \in K_0$, et donc f n'est pas une dynamique faiblement bornée. Sinon, il existe K_1 tel que $f^k(K_0)$ intersecte K_1 pour tout k .

Soit K_2 l'enveloppe convexe de $K_1 \cup K_0$; c'est un segment tel que $(f^k(K_2))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge partiellement et $f^k(K_2)$ intersecte K_2 pour tout k . On en déduit que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(K_2)$ est un intervalle non borné de \mathbb{R} stable par f ; son adhérence, notée G , est elle aussi stable par f . On pose

$$m = \begin{cases} \inf(G) & \text{si } \inf(G) \neq -\infty, \\ \inf(K_2) & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad M = \begin{cases} \sup(G) & \text{si } \sup(G) \neq +\infty, \\ \sup(K_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on pose $K = [m, M]$. Notons que $K_2 \subset K \subset G$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère le segment $L_k = \bigcup_{i=0}^k f^i(K)$. La suite $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers G au sens où, si $m_k = \min L_k$ et $M_k = \max L_k$ pour $k \in \mathbb{N}$ (de sorte que $L_k = [m_k, M_k]$), alors $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $\inf(G)$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $\sup(G)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $F_0 = K$ et $F_{k+1} = L_{k+1} \setminus L_k$, c'est-à-dire :

$$F_{k+1} = [m_{k+1}, m_k[\cup]M_k, M_{k+1}].$$

FIGURE 1. Représentation de la suite $(\bigcup_{i=0}^k f^i(K_2))_{k \in \mathbb{N}}$, puis de G et de la partition de G en les F_n , dans le cas où $\inf G \neq -\infty$.

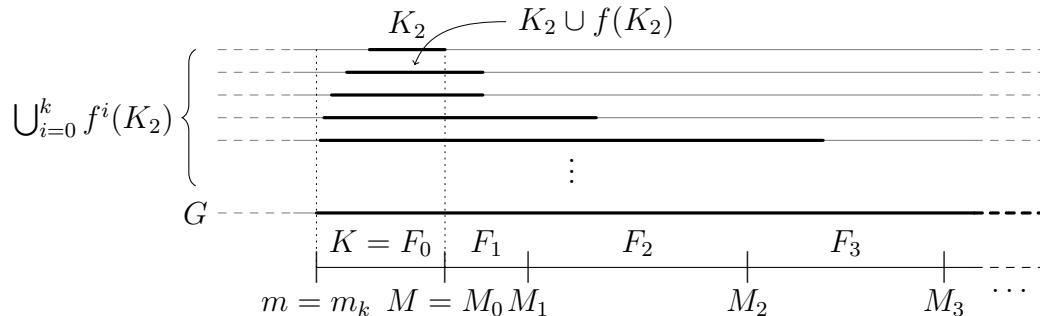
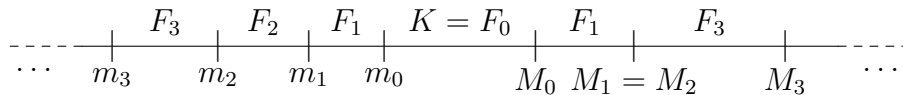


FIGURE 2. Représentation de la partition de G en les F_n lorsque $G = \mathbb{R}$.



Remarquons que si, par exemple, $\inf(G) \neq -\infty$, alors $m_{k+1} = m_k = m$, et donc $[m_{k+1}, m_k[$ est vide. Dans tous les cas, $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge fortement.

Posons, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$Q_k = f^{-k}(F_k) \cap K = \{x \in K \mid f^k(x) \in F_k\}.$$

Alors $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. En effet, pour tout entier $k \geq 0$, si $x \in Q_{k+1}$, alors $f^{k+1}(x) \notin L_k$, donc $f^k(x) \notin L_{k-1}$, et on en déduit que $f^k(x) \in F_k$ et $x \in Q_k$.

Ensuite, on pose $P_k = \overline{Q_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$. La suite obtenue $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et est constituée de compacts non vides. Par le théorème des compacts emboîtés, il existe un point x dans l'intersection $\bigcap_k P_k$; son image $f^k(x)$ appartient à $\overline{F_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge fortement, c'est aussi le cas de $(\overline{F_k})_{k \in \mathbb{N}}$, et donc de $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$. Finalement, f n'est pas faiblement bornée.

En conclusion, toute dynamique faiblement bornée sur \mathbb{R} est fortement bornée.

Cas $n = 2$

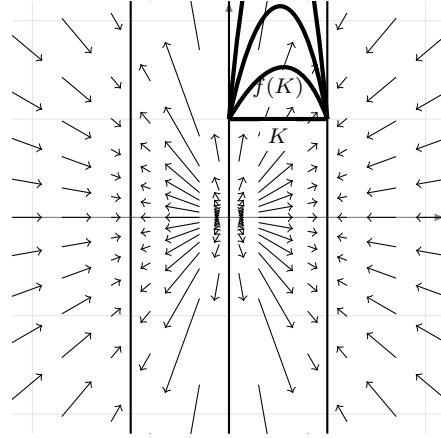
Pour le cas $E = \mathbb{R}^2$, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire une dynamique faiblement bornée sur \mathbb{R}^2 qui n'est pas fortement bornée. En voici une :

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) \longmapsto (g(|x|)x, g(|x|)y),$$

où $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ est une fonction continue telle que $g(0) = g(1) = 1$, telle que $1/x > g(x) > 1$ pour $0 < x < 1$ et telle que $1/x < g(x) < 1$ pour $x > 1$. Par exemple, on peut prendre

$$g: x \longmapsto \frac{1+x}{1+x^2}.$$

FIGURE 3. Un contre-exemple dans \mathbb{R}^2 : on a représenté de manière approximative le champ de vecteurs $x \mapsto f(x) - x$, ainsi que les premiers itérés par f du compact K .



On démontre facilement que f est continue et que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x, y) = \begin{cases} (1, y/x) & \text{si } x > 0, \\ (-1, -y/x) & \text{si } x < 0, \\ (0, y) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, f est une dynamique faiblement bornée. Par contre, le segment $K = [(0, 1), (1, 1)]$ est un compact dont la suite des itérés $(f^k(K))_{k \in \mathbb{N}}$ a, entre autre, pour valeurs d'adhérence les limites des suites $(f^k(x, 1))_{k \in \mathbb{N}}$ pour $x \in]0, 1]$, c'est-à-dire les points de

$$\{(1, 1/x) \mid x \in]0, 1]\} = \{1\} \times [1, +\infty[,$$

qui n'est clairement pas inclus dans un compact. Par conséquent, la suite $(f^k(K))_{k \in \mathbb{N}}$ diverge partiellement, et f n'est pas un dynamique fortement bornée.

Remarque : le champ de vecteurs qui à x associe $f(x) - x$ définit un flot continu $(\phi_t)_{t \geq 0}$ tel que ϕ_1 est faiblement bornée mais pas fortement bornée.

En conclusion, il existe des dynamiques faiblement bornées sur \mathbb{R}^2 qui ne sont pas fortement bornées.

Cas $n > 2$

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $E = \mathbb{R}^n$. On se donne de plus un isomorphisme linéaire i de \mathbb{R}^2 dans F et une projection linéaire surjective π de E sur F . Reprenons le contre-exemple f défini ci-dessus sur \mathbb{R}^2 . Alors il est facile de voir que $i \circ f \circ i^{-1} \circ \pi$ est une dynamique faiblement bornée qui n'est pas fortement bornée dans \mathbb{R}^n .

Conclusion

Soit \mathcal{E} la collection des espaces topologiques dont toutes les dynamiques faiblement bornées sont fortement bornées. \mathcal{E} contient \mathbb{R} et tous les espaces compacts. En revanche, \mathcal{E} ne contient pas \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$. De plus, en adaptant le cas $n > 2$, on voit que si \mathcal{E} ne contient pas un espace topologique E , alors \mathcal{E} ne contient pas non plus les espaces se rétractant sur un sous-espace homéomorphe à E .