

Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE (éd.)

Périodes p -adiques - Séminaire de Bures, 1988

Astérisque, tome 223 (1994)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223_>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223_>)

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

223

ASTÉRIQUE

1994



PÉRIODES p -ADIQUES

Séminaire de Bures, 1988

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ce volume est dédié à la mémoire d'Osamu Hyodo

Table des matières

Introduction	3
Exposé I :	
Luc Illusie : <i>Autour du théorème de monodromie locale.</i>	9
Exposé II :	
Jean–Marc Fontaine : <i>Le corps des périodes p-adiques.</i>	59
Avec un appendice par Pierre Colmez : <i>Les nombres algébriques sont denses dans B_{dR}^+.</i>	103
Exposé III :	
Jean–Marc Fontaine : <i>Représentations p-adiques semi-stables.</i>	113
Exposé IV :	
Bernadette Perrin–Riou : <i>Représentations p-adiques ordinaires.</i>	185
Avec un appendice par Luc Illusie : <i>Réduction semi-stable ordinaire, cohomologie étale p-adique et cohomologie de de Rham d’après Bloch–Kato et Hyodo.</i>	209
Exposé V :	
Osamu Hyodo and Kazuya Kato : <i>Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles.</i>	221
Exposé VI :	
Kazuya Kato : <i>Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology.</i>	269
Exposé VII :	
Michel Raynaud : <i>1–Motifs et monodromie géométrique.</i>	295

Exposé VIII :

Jean-Marc Fontaine : *Représentations ℓ -adiques potentiellement semi-stables*. 321

Exposé IX :

Jean-Pierre Wintenberger : *Théorème de comparaison p -adique pour les schémas abéliens. I : Construction de l'accouplement de périodes*. . . . 349

Introduction

Ce volume contient essentiellement la rédaction des exposés du séminaire sur les périodes p -adiques organisé à l'I.H.E.S., à Bures-sur-Yvette, en 1988¹ et je voudrais commencer par présenter mes plus plates excuses pour le délai ridiculement long qui se sera écoulé entre ce séminaire et sa parution, délai dont je suis en très grande partie responsable.

Je renvoie à [3] et [5] pour un historique du sujet mais je voudrais faire ici un bref historique du séminaire lui-même, qui trouve son origine dans une conjecture de Jannsen.

Soient K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, K_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et \overline{K} une clôture algébrique de K . J'avais conjecturé (cf. [2], conj. C_{dR}) l'existence, pour toute

¹ Le programme de ce séminaire avait été le suivant :

1. (2/2/88) J.-M. Fontaine : Exposé introductif.
2. (16/2/88) J.-P. Wintenberger : Le corps des périodes p -adiques.
3. (23/2/88) B. Mazur : Monodromie p -adique pour les formes modulaires.
4. (1/3/88) J.-M. Fontaine : Représentations p -adiques semi-stables et monodromie.
5. (8/3/88) L. Illusie : Autour du théorème de monodromie ℓ -adique.
6. (15/3/88) B. Perrin-Riou : Représentations p -adiques ordinaires.
7. (22/3/88) J.-M. Fontaine : Décomposition de Hodge-Tate pour les 1-motifs.
8. (12/4/88) et 9. (19/4/88) L. Illusie : Variétés semi-stables ordinaires, d'après Hyodo.
10. (26/4/88) et 11. (3/5/88) K. Kato : On Fontaine's "de Rham conjecture".
12. (10/5/88) M. Raynaud : Réalisation de de Rham des 1-motifs.
13. (17/5/88) J.-P. Wintenberger : Variation de structures de Hodge p -adiques.
14. (17/5/88, à Orsay) J.-M. Fontaine : Représentations galoisiennes potentiellement semi-stables.

variété X projective et lisse sur K , d'un isomorphisme de comparaison entre la cohomologie étale p -adique $H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ et la cohomologie de de Rham $H_{dR}^m(X/K)$, i.e. d'un isomorphisme canonique, fonctoriel et compatible avec toutes les structures

$$B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \simeq B_{dR} \otimes_K H_{dR}^m(X/K),$$

où B_{dR} est le “corps des périodes p -adiques”. J'avais conjecturé aussi que dans le cas de bonne réduction, on devait pouvoir faire mieux (conj. C_{cris}), c'est-à-dire récupérer la cohomologie étale p -adique à partir de la cohomologie cristalline de la fibre spéciale – considérée comme un K_0 -espace vectoriel D muni d'un Frobenius et d'une filtration sur $K \otimes_{K_0} D$ grâce à la comparaison avec la cohomologie de de Rham – et vice versa.

Après des résultats partiels dus à divers auteurs, Faltings [1] prouvait les conjectures C_{cris} et C_{dR} ². Peu de temps auparavant, Jannsen [6], motivé par ses recherches sur la cohomologie galoisienne des représentations ℓ -adiques associées aux variétés algébriques sur les corps de nombres, suggérait que, dans le cas de mauvaise réduction, il devait exister des structures supplémentaires, en particulier un opérateur de monodromie comme dans le cas ℓ -adique. Ceci m'amena à construire l'anneau B_{st} qui contient l'anneau B_{cris} utilisé pour formuler C_{cris} . La conjecture de Jannsen se reformule alors (conj. C_{st}) en affirmant l'existence, pour une variété X comme ci-dessus, lorsqu'elle a “réduction semi-stable”, d'une cohomologie qui généralise la cohomologie cristalline et d'un isomorphisme de comparaison entre cette cohomologie et la cohomologie étale p -adique. En utilisant les théorèmes de comparaison dans le cas de bonne réduction et le théorème de réduction semi-stable, je pus prouver C_{st} pour les variétés abéliennes (et même pour les 1-motifs).

Ceci nous conduisit à mettre sur pieds un séminaire autour de C_{dR} , C_{cris} et C_{st} et nous eûmes la chance de voir le sujet se développer au fur et à mesure que le séminaire avançait. En particulier,

– la conjecture C_{st} fut confortée par les travaux de Mazur, Tate et Teitelbaum [7] sur la représentation p -adique associée à une forme modulaire

² Du moins dans le cas de bonne réduction. Il y a un point obscur dans la preuve de C_{dR} et il n'est pas clair que la démonstration s'applique sans hypothèse restrictive.

de poids > 2 dont le niveau est exactement divisible par p : on comprenait comment cette représentation de dimension 2 pouvait être irréductible, malgré l'existence d'un opérateur de monodromie qui semblait décomposer l'espace de la représentation en somme directe de deux droites, on découvrait aussi une interprétation galoisienne conjecturale du nouvel invariant qu'ils avaient mis en évidence³ ;

– nous fûmes conduit, B. Mazur et moi, à conjecturer que les représentations ℓ -adiques de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui “proviennent de la géométrie algébrique” sont exactement celles qui sont non ramifiées en dehors d'un nombre fini de places et sont potentiellement semi-stables en $p = \ell$ (cf. [4] pour un énoncé précis et pour une discussion de quelques travaux récents qui semblent étayer cette conjecture) ;

– mais surtout, alors que nous venions d'expliquer, Luc Illusie et moi, à Kazuya Kato qui se trouvait être à Orsay, ce qu'était la conjecture C_{st} , son élève, Osamu Hyodo, resté à Tokyo, lui écrivait pour lui dire comment, en utilisant un “complexe de de Rham–Witt à pôles logarithmiques”, il pensait pouvoir construire une cohomologie qui s'avéra être celle que nous cherchions. Dès lors, on travailla dur, à Bures–Orsay et à Tokyo, et on aboutit aux exposés V et VI du présent volume qui, sans démontrer C_{st} en général, donnent toutefois des résultats substantiels sur la question.

Voici maintenant un très bref aperçu du contenu de chacun des exposés rédigés :

– Dans l'exposé I, Luc Illusie décrit quelques aspects, tournant autour du théorème de monodromie locale de Grothendieck, des analogues ℓ -adiques et analytiques complexes de certains des problèmes qui sont abordés dans la suite dans le cadre p -adique.

– Dans l'exposé II, on construit et on étudie quelques propriétés du corps des périodes p -adiques B_{dR} et de quelques-uns de ses sous-anneaux (en particulier B_{dR}^+ , B_{cris} et B_{st}). Dans un appendice, Pierre Colmez montre que

³ L'exposé de B. Mazur sur ce sujet n'a pas été rédigé. On ne sait toujours pas prouver que la représentation associée à une telle forme modulaire est bien semi-stable.