Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES CONVEXES DE DEGRÉ DEUX SUR $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Samir Bedrouni & David Marín

Tome 148
Fascicule 4

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 613-622

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 148, décembre 2020

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
148 (4), 2020, p. 613-622

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES CONVEXES DE DEGRÉ DEUX SUR $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

PAR SAMIR BEDROUNI & DAVID MARÍN

RÉSUMÉ. — Un feuilletage holomorphe sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ou analytique réel sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ est dit convexe si ses feuilles qui ne sont pas des droites n'ont pas de points d'inflexion. La classification des feuilletages convexes de degré 2 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a été établie en 2015 par C. FAVRE et J. PEREIRA. L'argument principal de cette classification était un résultat obtenu en 2004 par D. SCHLOMIUK et N. VULPE concernant les champs de vecteurs réels polynomiaux de degré 2 dont le feuilletage de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ associé est convexe. Nous présentons ici une nouvelle démonstration de cette classification, plus simple, n'utilisant pas ce résultat et ne sortant pas du cadre holomorphe; elle s'appuie sur des propriétés de certains modèles de feuilletages convexes de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré quelconque et du discriminant du tissu dual d'un feuilletage de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Texte reçu le 4 septembre 2019, accepté le 12 mai 2020.

SAMIR BEDROUNI, Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia, 16111 Bab-Ezzouar, Alger, Algérie • *E-mail :* `sbedrouni@usthb.dz`

DAVID MARÍN, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, E-08193 Bellaterra (Barcelona), Spain; Centre de Recerca Matemàtica, E-08193 Bellatera, Spain • *E-mail :* `davidmp@mat.uab.es`

Classification mathématique par sujets (2010). — 37F75, 32S65, 32M25.

Mots clefs. — Feuilletage convexe, Tissu dual, Discriminant, Singularité, Diviseur d'inflexion.

D. Marín acknowledges financial support from the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness, through the grants MTM2015-66165-P, PGC2018-095998-B-I00 and the « María de Maeztu » Programme for Units of Excellence in R&D (MDM-2014-0445).

 0037-9484/2020/613/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2818

Abstract (*A new proof of the classification of convex foliations of degree two on the complex projective plane*). — A holomorphic foliation on $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, or a real analytic foliation on $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, is said to be convex if its leaves other than straight lines have no inflection points. The classification of the convex foliations of degree 2 on $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ has been established in 2015 by C. Favre and J. Pereira. The main argument of this classification was a result obtained in 2004 by D. Schlomiuk and N. Vulpe concerning the real polynomial vector fields of degree 2 whose associated foliation on $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ is convex. We present here a new proof of this classification, that is simpler, does not use this result and does not leave the holomorphic framework. It is based on the properties of certain models of convex foliations of $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ of arbitrary degree and of the discriminant of the dual web of a foliation of $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Introduction

L'ensemble $\mathbf{F}(d)$ des feuilletages de degré d sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ s'identifie à un ouvert de Zariski dans un espace projectif de dimension $(d+2)^2-2$ sur lequel agit le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Suivant [7] un feuilletage de $\mathbf{F}(d)$ est dit *convexe* si ses feuilles qui ne sont pas des droites n'ont pas de points d'inflexion.

D'après [5, Proposition 2.2] tout feuilletage de degré 0 ou 1 est convexe. Pour $d \geq 2$, l'ensemble des feuilletages convexes de $\mathbf{F}(d)$ est un fermé de Zariski propre de $\mathbf{F}(d)$ et il contient les feuilletages $\mathcal{H}_1^d$, resp. $\mathcal{F}_1^d$, resp. $\mathcal{F}_0^d$ définis en carte affine par les 1-formes (*voir* [2, Proposition 4.1], [1, page 75] et [7, page 179])

$$\begin{aligned}
&\omega_1^d = y^d\mathrm{d}x - x^d\mathrm{d}y,\\
&\text{resp. } \overline{\omega}_1^d = y^d\mathrm{d}x + x^d(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x),\\
&\text{resp. } \overline{\omega}_0^d = (x^d - x)\mathrm{d}y - (y^d - y)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Les feuilletages $\mathcal{H}_1^d$ et $\mathcal{F}_1^d$ appartiennent tous deux à l'adhérence dans $\mathbf{F}(d)$ de l'orbite sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ du feuilletage $\mathcal{F}_0^d$, dit feuilletage de Fermat de degré d. Notons de plus que $\mathcal{H}_1^d$ est *homogène* au sens où il est invariant par homothétie.

En 2015 Favre et Pereira [6, Proposition 7.4] ont classifié les feuilletages convexes de degré 2 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Plus précisément ils ont montré le résultat suivant.

Théorème A ([6]). — *À automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ près, il y a trois feuilletages convexes de degré deux sur le plan projectif complexe, à savoir les feuilletages $\mathcal{H}_1^2$, $\mathcal{F}_1^2$ et $\mathcal{F}_0^2$ décrits respectivement en carte affine par les 1-formes suivantes*

1. $\omega_1^2 = y^2\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y$;
2. $\overline{\omega}_1^2 = y^2\mathrm{d}x + x^2(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$;
3. $\overline{\omega}_0^2 = (x^2 - x)\mathrm{d}y - (y^2 - y)\mathrm{d}x$.

L'argument fondamental de cette classification était le résultat de SCHLOMIUK et VULPE dans [10, Théorème 50]. Ces derniers donnent en carte affine une liste [10, Table 2] de formes normales pour les feuilletages convexes de degré 2 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (ils considèrent en effet des champs de vecteurs de type $\mathrm{X}=A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, où A et B sont des polynômes de $\mathbb{R}[x,y]$ vérifiant $\mathrm{pgcd}(A,B)=1$ et $\max(\deg A,\deg B)=2$). FAVRE et PEREIRA [6, Proposition 7.4] ont remarqué que les arguments de [10, Théorème 50] s'appliquent de façon identique aux champs de vecteurs complexes. Leur démonstration a ainsi consisté à réduire le nombre de modèles de champs de vecteurs réels présentés dans [10, Table 2] en cherchant ceux qui sont conjugués par un automorphisme de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Dans cet article nous donnons une nouvelle démonstration de cette classification, n'utilisant pas [10, Théorème 50] et ne sortant pas du cadre analytique complexe ; elle repose sur certaines propriétés des feuilletages $\mathcal{H}_1^d$, $\mathcal{F}_0^d$, $\mathcal{F}_1^d$ ([2, Proposition 4.1], [2, Proposition 6.3], Proposition 2.4 démontrée au §2) et du discriminant du tissu dual d'un feuilletage de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ([4, Lemme 2.2] et [7, Proposition 3.3]), *voir* §2 et §3.

1. Singularités, diviseur d'inflexion et tissu dual d'un feuilletage de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de degré d sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est défini en coordonnées homogènes $[x:y:z]$ par une 1-forme du type

$$\omega=a(x,y,z)\mathrm{d}x+b(x,y,z)\mathrm{d}y+c(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

où a, b et c sont des polynômes homogènes de degré $d+1$ sans facteur commun satisfaisant la condition d'EULER $i_{\mathrm{R}}\omega=0$, où $\mathrm{R}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ désigne le champ radial et i_{R} le produit intérieur par R. Le *lieu singulier* $\mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est le projectivisé du lieu singulier de ω

$$\mathrm{Sing}\,\omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,a(x,y,z)=b(x,y,z)=c(x,y,z)=0\}.$$

Rappelons quelques notions locales attachées au couple $(\mathcal{F},s)$, où $s\in\mathrm{Sing}\mathcal{F}$. Le germe de $\mathcal{F}$ en s est défini, à multiplication près par une unité de l'anneau local $\mathcal{O}_s$ en s, par un champ de vecteurs $\mathrm{X}=A(\mathrm{u},\mathrm{v})\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}+B(\mathrm{u},\mathrm{v})\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}$. La *multiplicité algébrique* $\nu(\mathcal{F},s)$ de $\mathcal{F}$ en s est donnée par

$$\nu(\mathcal{F},s)=\min\{\nu(A,s),\nu(B,s)\},$$

où $\nu(g,s)$ désigne la multiplicité algébrique de la fonction g en s. L'*ordre de tangence* entre $\mathcal{F}$ et une droite générique passant par s est l'entier

$$\tau(\mathcal{F},s)=\min\{k\geq\nu(\mathcal{F},s):\det(J^k_s\,\mathrm{X},\mathrm{R}_s)\neq0\},$$

où $J^k_s\,\mathrm{X}$ est le k-jet de X en s et R_s est le champ radial centré en s.