Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LE THÉORÈME DE LA MONODROMIE POUR UNE FAMILLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

Zoghman Mebkhout

Tome 148
Fascicule 4

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 651-708

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 148, décembre 2020

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
148 (4), 2020, p. 651-708

SUR LE THÉORÈME DE LA MONODROMIE POUR UNE FAMILLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

PAR ZOGHMAN MEBKHOUT

À la Mémoire d'Alexandre Grothendieck

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous démontrons un théorème de monodromie semi-global pour un fibré de de Rham p-adique au voisinage d'un point générique d'une hypersurface d'un schéma lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ en dimensions supérieures.

ABSTRACT (*On the monodromy theorem for the family of p-adic differential equations*). — In this article we prove a semi-global monodromy theorem for a p-adic de Rham bundle in the neighbourhood of a generic point of a hypersurface of a smooth scheme over a perfect field with characteristic $p > 0$ in higher dimensions.

Dans cet article nous étendons le théorème de la monodromie des équations différentielles sur un corps p-adique de corps résiduel parfait k ([1], [16], [18], [19]) au cas d'un corps p-adique de corps résiduel de type fini sur k et nous montrons dans le §5, en utilisant la Théorie des Schémas [14], le théorème de monodromie semi-global pour les fibrés p-adiques en dimensions supérieures qui a été notre motivation géométrique. Dans ce but nous étudions dans le §1 l'action de Frobenius sur les corps des scalaires, nous montrons qu'en général un corps p-adique à valuation discrète complet à corps résiduel parfait n'admet

Texte reçu le 23 juin 2017, modifié le 25 février 2019, accepté le 25 mai 2020.

ZOGHMAN MEBKHOUT, Institut de Mathématiques de Jussieu UMR7586, Université D. Diderot Paris 7, Batiment Sophie Germain, Case 7012 75205 Paris cedex 13 • *E-mail :* zoghman.mebkhout@imj-prg.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 11S20, 12H25, 14F40.

Mots clefs. — Familles d'équations différentielles p-adiques, Actions géometriques de Frobenius, Théorème de monodromie en rang 1, Propriétés (DNL), (NLE) des exposants, Strucures géométriques de Frobenius, Foncteurs de monodromies, Théorème de monodromie semi-global.

 0037-9484/2020/651/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2820

pas d'extension finie admettant un automorphisme de Frobenius qui prolonge l'automorphisme de l'anneau des vecteurs de Witt du corps résiduel et nous introduisons l'action géométrique de Frobenius (σ). Nous montrons dans le §2, qui est indépendant du §1, qu'un module soluble de rang 1 et de pente non nulle devient de pente nulle après extension permise finie pour tout corps p-adique à valuation discrète complet sans autres conditions, ce qui clarifie une fois pour toute, comme nous l'espérons, une situation bien confuse à ce jour. Dans le §3 nous étudions les rapports entre constituants irréductibles et absolument irréductibles d'un module différentiel. En tenant compte de ces résultats nous améliorons dans le §4 les résultats des articles ([18], [19]), en particulier nous obtenons en égales caractéristiques zéro le meilleur théorème de décomposition en rang 1 possible. Cet article peut servir au lecteur non averti d'introduction aux résultats les plus profonds de la théorie des équations différentielles p-adiques.

Nous remercions infiniment le rapporteur de la section 5 de l'avoir relue soigneusement, qui a permis d'améliorer sa rédaction et ses notations pour le bénéfice du lecteur et pour la promotion des mathématiques.

1. Endomorphismes géométriques de Frobenius d'un corps p-adique

Soient $p > 0$ un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques muni de la valeur absolue $|-|$ normalisée par $|p| = 1/p$.

Définition 1.1. — Nous appelons corps p-adique une extension $\mathbb{Q}_p \to L$ de corps valués ultramétriques.

Si L est un corps p-adique on note $|-|$ sa valeur absolue, $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers et $k := k_L$ son corps résiduel. On rappelle qu'un endomorphisme (de corps) borné d'un corps valué est une isométrie, en particulier un endomorphisme d'un corps p-adique $\mathbb{Q}_p$-linéaire continu est une isométrie. Nous indiquons dans chaque énoncé les hypothèses faites sur le corps des scalaires. Mais pour la commodité du lecteur nous désignons en général par K un corps p-adique à valuation discrète complet dont le corps résiduel est parfait, par E un corps p-adique à valuation discrète complet de corps résiduel éventuellement non parfait et par C un corps p-adique algébriquement clos et complet.

Définition 1.2. — On dit qu'un endomorphisme d'un corps p-adique $\sigma : L \to L$ est de Frobenius s'il induit l'identité sur $\mathbb{Q}_p$, s'il est continu et si pour tout élément a de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ on a l'inégalité $|\sigma(a) - a^p| < 1$.

Autrement dit un endomorphisme de Frobenius est un endomorphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire continu qui relève l'endomorphisme de Frobenius du corps résiduel. Le complété $\mathbb{C}_p$ d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ admet un automorphisme de Frobenius qui dépend de l'axiome du choix ([4], prop. 1.10.1). Dans le cas général l'existence ou non d'un endomorphisme de Frobenius sur un corps p-adique est une question plutôt délicate qui a donné lieu à une grande confusion. Nous allons examiner le cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète complet à corps résiduel parfait, le cas d'un corps à valuation discrète complet à corps résiduel parfait puis le cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète de corps résiduel un corps de fonctions sur un corps parfait.

1.1. Cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète et de corps résiduel parfait. — Soit K un corps p-adique à valuation discrète complet et à corps résiduel parfait, l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ est donc une extension finie totalement ramifiée de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et C le complété de $\overline{K}$. Nous montrons :

Théorème 1.3. — *Le corps $\overline{K}$ admet un automorphisme de Frobenius σ qui prolonge l'automorphisme de Frobenius canonique σ_c sur l'anneau $W(k)$ et qui se prolonge en un automorphisme de Frobenius σ du corps C.*

Lemme 1.4. — *Soit K un corps p-adique à valuation discrète complet et à corps résiduel parfait, alors l'anneau $W(\overline{k})$ des vecteurs de Witt à coefficient dans la clôture algébrique $\overline{k}$ s'injecte canoniquement dans l'anneau des entiers du corps C de façon compatible avec le passage au corps résiduel.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble les extensions finies $k \to k'$ dans le corps résiduel de $\overline{K}$ et leur relèvement canonique $W(k) \to W(k')$ dans $\overline{K}$ qui forment de façon naturelle un ensemble inductif $W(k')_{k\to k'}$. Le complété de la limite inductive $\widehat{\lim_{k\to k'} W(k')}$ dans l'anneau métrique complet O_C est un anneau de valuation discrète complet non ramifié sur $W(k)$ et dont le corps résiduel est la clôture algébrique $\overline{k}$. Il admet donc un $W(k)$-isomorphisme canonique sur l'anneau $W(\overline{k})$. □

On rappelle qu'un corps ultramétrique Ω est maximalement complet si l'intersection de toute suite de disques emboités non vides est non vide. Un corps maximalement complet est complet. Nous rappelons le théorème ([13], lem. 8.2) :

Théorème 1.5. — *Soit Ω un corps ultramétrique* **algébriquement clos** *et maximalement complet, alors tout automorphisme borné d'un sous-corps se prolonge en en automorphisme borné de Ω.*

L'hypothèse d'être algébriquement clos est indispensable, elle est nécessaire pour le point 8.3.2 de la démonstration du lemme 8.2. Il est facile de construire des exemples où un tel automorphisme ne prolonge pas sans cette hypothèse. Un tel prolongement dépend de l'axiome du choix.