Séminaire BOURBAKI Octobre 2018
71e année, 2018–2019, no 1152, p. 61 à 107
doi:10.24033/ast.1131

THÉORIE GLOBALE DU PLURIPOTENTIEL, ÉQUIDISTRIBUTION ET PROCESSUS PONCTUELS
[d'après Berman, Boucksom, Witt Nyström, ...]

par **Romain DUJARDIN**

INTRODUCTION

0.1. — La théorie du potentiel logarithmique dans $\mathbb{C}$ a des liens profonds et directs avec l'analyse complexe et l'étude des propriétés analytiques des polynômes. Dans les années 1980-90, la *théorie du pluripotentiel* dans $\mathbb{C}^n$ s'est attachée à étendre les idées de la théorie classique du potentiel au cas de plusieurs variables complexes. Ses outils clefs sont les fonctions plurisousharmoniques et l'opérateur de Monge-Ampère, qui jouent respectivement le rôle des fonctions (sous)harmoniques et du laplacien. Ont été ainsi généralisées des notions classiques comme la capacité logarithmique, le diamètre transfini, etc. Parallèlement, se développaient des méthodes transcendantes en géométrie algébrique complexe utilisant peu ou prou les mêmes outils. La véritable convergence entre ces deux domaines de recherche a eu lieu dans les années 2000, et a mené à des résultats spectaculaires (voir par exemple l'exposé de J.-P. Demailly dans ce séminaire [**26**]). À la suite des travaux d'auteurs comme notamment V. Guedj, A. Zeriahi, R. Berman, S. Boucksom, il apparaît qu'un cadre naturel pour la théorie du pluripotentiel est celui d'une variété complexe compacte munie d'un fibré en droites possédant des propriétés de positivité. De manière remarquable, ce point de vue « global » a permis la résolution de problèmes anciens en théorie du pluripotentiel, comme celui de l'équidistribution des points de Fekete — ce sont les configurations de points qui réalisent le diamètre transfini, analogues à la distribution à l'équilibre d'une famille finie de particules chargées électriquement. Inversement, la théorie classique du potentiel, via son interprétation électrostatique, interagit naturellement avec la mécanique statistique et les probabilités, et ceci permet en retour d'envisager une approche probabiliste de certains problèmes de géométrie algébrique complexe.

0.2. — Notre objectif dans cet exposé est de rendre compte de manière pédagogique de certains résultats dans cette thématique, principalement dus à R. Berman, S. Boucksom, et D. Witt Nyström. D'autres auteurs fréquemment cités sont T. Bloom et N. Levenberg. Nous avons choisi de partir de la théorie classique du potentiel et d'augmenter progressivement le degré de généralité afin de comprendre les objets mis en jeu ainsi que le cheminement intellectuel (supposé !) qui a mené à ces idées. Le texte est par ailleurs clairsemé de résultats d'équidistribution. Il y a une intersection substantielle avec l'exposé récent de J.-P. Serre à ce séminaire **[41]** (principalement au § 1), et surtout avec celui de J.-P. Demailly **[26]** qui se situe résolument en géométrie kählerienne. Notre texte s'adressera ainsi peut-être plus aux analystes qu'aux géomètres (1).

Nous présentons d'abord de manière relativement informelle quelques points de théorie du potentiel et du pluripotentiel aux §§ 1 et 2, puis la discussion se formalise aux §§ 3, 4 et 5 qui constituent le cœur de l'exposé. Nous concluons au § 6 par un aperçu de certains résultats plus récents de R. Berman en lien avec la théorie probabiliste des grandes déviations.

0.3. — Introduisons quelques notations. On désignera par $\mathscr{M}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{A})$. En général X sera un ensemble compact muni de sa tribu borélienne et $\mathscr{M}(X)$ sera muni de sa topologie faible qui en fait un compact (la convergence faible des mesures sera notée $\rightharpoonup$). Si E est un sous-ensemble fini de X on note $[E] = \sum_{x\in E} \delta_x$. L'espace des polynômes de degré d à n variables sera noté $\mathscr{P}_d(\mathbb{C}^n)$ (nous omettons la mention de $\mathbb{C}^n$ quand il n'y a pas de risque de confusion). On notera $|\cdot|$ la norme hermitienne standard dans $\mathbb{C}^n$; cette notation sera aussi celle utilisée pour une métrique sur un fibré en droites. La norme uniforme sur un ensemble E sera notée $\|\cdot\|_E$. Enfin, on pose classiquement $d^c = \frac{1}{2i\pi}(\overline{\partial} - \partial)$, de sorte que $dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$.

Nous utiliserons les abréviations classiques suivantes : psh pour plurisousharmonique, sci (resp. scs) pour semi-continu inférieurement (resp. supérieurement), p.p. pour presque partout.

0.4. — Je tiens à remercier Sébastien Boucksom, Serge Cantat et Charles Favre pour leurs commentaires sur ce texte.

(1) Dans le même esprit on peut signaler les notes de N. Levenberg **[37]** qui présentent les résultats de **[10]** et **[12]** sans quitter le cadre de la théorie du pluripotentiel pondérée dans $\mathbb{C}^n$.

1. THÉORIE CLASSIQUE DU POTENTIEL

La théorie du potentiel dans $\mathbb{C}$ est classiquement liée à des questions d'interpolation et d'approximation polynomiale. Dans cette section nous passons en revue certains de ces résultats, en nous appuyant sur l'approche par l'électrostatique qui est très parlante.

1.1. Capacité et diamètre transfini. — (Voir **[49, 40]** pour plus de détails.) Soit K un compact du plan. L'objet de l'électrostatique est de déterminer la répartition d'un ensemble de particules chargées (disons négativement) astreintes à rester sur K, que nous modéliserons par une mesure positive μ à support dans K. En l'absence de champ extérieur (nous y reviendrons), ces particules interagissent selon la loi de Coulomb qui (dans le plan) met en jeu des forces répulsives proportionnelles à l'inverse de la distance. On introduit donc l'énergie

$$I^-(\mu) = -\int \log|z-w|\, d\mu(z)d\mu(w)$$

(qui peut valoir $+\infty$, par exemple si μ a un atome) et l'objet est de chercher une distribution μ à support dans K minimisant cette énergie. Comme il est d'usage en plusieurs variables complexes de travailler avec des fonctions sousharmoniques plutôt que surharmoniques, nous inversons le signe et chercherons plutôt à maximiser $I(\mu) = -I^-(\mu)$. On pose également

$$V(K) = \sup\{I(\mu), \mu \text{ probabilité sur } K\}.$$

Par définition $-V(K)$ est la *constante de Robin* de K et sa *capacité électrostatique* est $\operatorname{cap}(K) = \exp(V(K))$. Alors ou bien pour toute probabilité μ sur K on a $I(\mu) = -\infty$ (K est alors dit *polaire*) ou bien il existe une *unique* mesure de probabilité μ_K maximisant l'énergie I. Noter que la capacité d'un ensemble polaire est 0. Par définition μ_K est la *mesure d'équilibre* de K. Son potentiel logarithmique U_{μ_K} est la fonction définie par

$$U_{\mu_K}(z) = \int \log|z-w|\, d\mu_K(w).$$

Elle satisfait les propriétés suivantes

1. $U_{\mu_K} \geqslant V(K)$;
2. $U_{\mu_K} = V(K)$ « quasi-partout » sur K ;
3. $U_{\mu_K}(z) = \log|z| + o(1)$ quand $z \to \infty$ dans $\mathbb{C}$;
4. $\Delta U_{\mu_K} = 2\pi\mu_K$ au sens des distributions.

Un mot sur la notion générale de capacité et le terme « quasi-partout » : une *capacité* (au sens de Choquet) sur un espace topologique séparé X est une fonction réelle positive définie sur l'ensemble des parties de X qui est croissante par inclusion, continue par limites croissantes, et continue pour les limites décroissantes de compacts. Le théorème de capacitabilité de Choquet affirme que si cap est une capacité sur X séparable et localement compact et si E est un borélien alors

$$\operatorname{cap}(E) = \sup \{\operatorname{cap}(K),\ K \text{ compact},\ K \subset E\}.$$

Une propriété a lieu *quasi-partout* si elle est vraie hors d'un ensemble de capacité nulle. Bien entendu la capacité électrostatique définie ci-dessus se prolonge aux sous-ensembles du plan en une capacité en ce sens.

Si maintenant E est un sous-ensemble fini de K, la définition de l'énergie ci-dessus impose que $I([E]) = -\infty$. Il est donc naturel de supprimer les termes diagonaux et de poser

$$\widetilde{I}(E) = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{\substack{(z,w)\in E^2 \\ z\neq w}} \log|z-w|.$$

Un ensemble maximisant cette énergie parmi tous les ensembles de cardinal k donné est appelé *configuration de Fekete.* Les configurations de Fekete ne sont pas uniques en général (penser au cas d'un cercle). On a coutume de travailler multiplicativement et d'introduire le k*-diamètre*

$$\delta_k(K) = \sup_{x_1,\ldots,x_k\in K} \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_j - x_i| \right)^{2/(k(k-1))}.$$

On montre assez facilement que $\delta_{k+1}(K) \leqslant \delta_k(K)$. La limite $\delta_\infty(K) = \lim_k \delta_k(K)$ s'appelle le *diamètre transfini* de K. Il est instructif de détailler le théorème suivant qui est dû à Fekete et Szegő.

Théorème 1.1 (Fekete, Szegő). — *Avec les notations ci-dessus on a* $\delta_\infty(K) = \operatorname{cap}(K)$. *De plus les configurations de Fekete s'équidistribuent vers la mesure d'équilibre lorsque k tend vers l'infini. Plus précisément si pour tout k, F_k est une configuration de Fekete à k points, alors* $\frac{1}{k}[F_k] \to \mu_K$.

Démonstration. — Si $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est un sous-ensemble de K de cardinal k on a

$$\frac{1}{k(k-1)}\widetilde{I}(E) = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} \log|x_i - x_j| \leqslant \log \delta_k(K).$$

Soit maintenant μ une mesure de probabilité diffuse sur K. Noter que la mesure produit μ^n donne une masse totale aux sous-ensembles de K^n de cardinal k. Ainsi, si on intègre l'inégalité précédente par rapport à $d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_k)$ il vient $I(\mu) \leqslant \log \delta_k(K)$. En faisant tendre k vers l'infini et en maximisant sur μ on en déduit que $\operatorname{cap}(K) \leqslant \delta_\infty(K)$.

Soit maintenant une suite (F_k) de configurations de Fekete. Posons $\nu_k = \frac{1}{k}[F_k]$ et soit (k_j) une sous-suite telle que (ν_{k_j}) tend vers ν. Par simplicité d'écriture notons $k_j = k$. Estimons l'énergie de ν :

$$\begin{aligned}
I(\nu) &= \int \log|z-w|\, d\nu(z)d\nu(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \int \max(\log|z-w|, -M) d\nu(z)d\nu(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \int \max(\log|z-w|, -M) d\nu_k(z)d\nu_k(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\int_{\{z=w\}} + \int_{F_k\times F_k\setminus\{z=w\}} \right) \max(\log|z-w|, -M) d\nu_k(z)d\nu_k(w) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k^2}(-M) + \frac{1}{k^2}\widetilde{I}(F_k) \right) \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k^2}(-M) + \frac{k(k-1)}{k^2} \log\delta_k(K) \right) = \log\delta_\infty(K).
\end{aligned}$$

Comme par ailleurs on a nécessairement $I(\nu) \leqslant \log(\operatorname{cap}(K))$ on conclut à la fois que $\operatorname{cap}(K) = \delta_\infty(K)$ et que ν est une mesure maximisante, donc par unicité $\nu = \mu_K$. □

Il découle clairement de la preuve que l'équidistribution a également lieu si la suite (F_k) n'est qu'*asymptotiquement* optimale, *i. e.* $\widetilde{I}(\nu_k) \to \log\delta_\infty(K)$. En outre il n'est pas nécessaire que F_k soit inclus dans K, il suffit que toute valeur d'adhérence de la suite $\frac{1}{k}[F_k]$ le soit. On a ainsi montré le résultat suivant :

PROPOSITION 1.2. — *Soit K un compact du plan et (F_k) une suite d'ensembles finis de cardinal e_k tendant vers l'infini. Supposons que la suite $\left(\frac{1}{e_k}[F_k]\right)$ converge faiblement vers une probabilité ν à support dans K. Alors*

$$I(\nu) \geqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{e_k(e_k-1)} \widetilde{I}(F_k).$$

En particulier si $\liminf \frac{1}{e_k(e_k-1)}\widetilde{I}(F_k) \geqslant \log(\operatorname{cap}(K))$, *alors* $\frac{1}{e_k}[F_k]$ *converge vers* μ_K.

1.2. Norme uniforme. — Les résultats précédents ont des applications plus ou moins directes à des questions d'approximation polynomiale uniforme. Remarquons déjà que la quantité $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}(x_j - x_i)$ n'est autre que le déterminant de Vandermonde de $(x_1, \ldots, x_k)$, ce qui fait que les points de Fekete sont des choix naturels pour l'interpolation de Lagrange sur K : en effet si $F_k = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est une configuration de Fekete à k points, le polynôme de Lagrange élémentaire

$$L_k(z) = \frac{1}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)} \prod_{j\neq k}(z - x_j)$$