Séminaire BOURBAKI Janvier 2019
71e année, 2018–2019, no 1158, p. 291 à 326
doi:10.24033/ast.1137

RÉDUCTION STABLE EN DIMENSION SUPÉRIEURE [d'après Kollár, Hacon-Xu, ...]

par **Olivier BENOIST**

INTRODUCTION

L'espace de modules M_g des courbes lisses de genre $g \geqslant 2$ construit par Mumford [**66**] est une variété algébrique dont les points complexes sont naturellement en bijection avec les classes d'isomorphisme de courbes projectives lisses complexes de genre g (nous renvoyons à [**3**] et à [**55**] pour un aperçu de l'histoire de ce sujet).

Que ce soit pour étudier les dégénérescences de familles de courbes lisses ou la géométrie de la variété M_g elle-même, il est utile de disposer d'une compactification projective de M_g qui soit *modulaire*, c'est-à-dire qui paramètre encore des courbes algébriques, éventuellement singulières. Une telle compactification a été construite par Deligne et Mumford [**14**] : c'est l'espace de modules des courbes stables $\overline{M}_g$.

La recherche d'espaces de modules analogues paramétrant des variétés de dimension supérieure a suscité de nombreux travaux. Pour obtenir une théorie similaire, on se restreint aux variétés dont le fibré canonique est ample [(1)]. Le cas des surfaces a alors été résolu par Kollár, Shepherd-Barron et Alexeev [**60, 47, 5**], et Viehweg [**79**] a traité le cas des variétés lisses en dimension arbitraire.

Le cas général a fait l'objet d'avancées récentes, décrites dans ce rapport. Ces progrès sont dus au développement du programme des modèles minimaux par Birkar, Cascini, Hacon, McKernan et Xu [**12, 36, 34**], à de nombreux travaux de Kollár [**47, 57, 53, 54**], ainsi qu'à Fujino, Kovács et Patakfalvi [**22, 62**].

Nous expliquons tout d'abord une motivation pour ces travaux : obtenir des théorèmes de réduction stable en dimension supérieure (théorèmes 1.6 et 1.7). Nous

(1) Par le biais de leurs modèles canoniques, cela prend en compte toutes les variétés de type général. Des compactifications modulaires ont aussi été construites, par d'autres méthodes que celles expliquées ici, pour d'autres espaces de modules : variétés abéliennes [**7**], certaines variétés de Fano [**64**].

définissons ensuite les variétés stables qui jouent dans ce cadre le rôle des courbes stables de Deligne et Mumford, et énonçons le théorème d'existence des espaces de modules de variétés stables (théorème 2.6). Dans les troisième et quatrième sections, nous esquissons enfin la preuve du théorème de réduction stable et la construction de ces espaces de modules.

Conventions. Tous les schémas sont des $\mathbb{Q}$-schémas noethériens. Une variété est un schéma séparé de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, par exemple le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. RÉDUCTION SEMI-STABLE ET RÉDUCTION STABLE

Fixons dans cette section un morphisme propre et surjectif $f : \mathscr{X} \to B$ entre variétés réduites. Supposons B intègre, et notons η le point générique de B et $\mathscr{X}_\eta$ la fibre générique de f. On voit f comme une famille de variétés algébriques paramétrée par les points de B. Cette famille peut avoir de mauvaises propriétés : les fibres de f peuvent ne pas toutes avoir la même dimension, être très singulières... On est ainsi amené à rechercher des modèles birationnels $f' : \mathscr{X}' \to B'$ de f dont la géométrie et les singularités sont contrôlées. Plus précisément, on recherche un diagramme commutatif :

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathscr{X}' \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathscr{X}_{B'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{X} \arrow[d, "f"] \\ & B' \arrow[r, "\pi"] & B, \end{tikzcd}$$

dans lequel B' est une variété intègre de point générique η', le morphisme $\pi : B' \to B$ est propre, génériquement fini et surjectif, le carré est cartésien, $\phi_{\eta'}$ est birationnelle et f' est propre. Quelles propriétés peut-on alors imposer au morphisme f' ?

1.1. Réduction semi-stable

Une première réponse est apportée par le théorème de réduction semi-stable de Kempf, Knudsen, Mumford et Saint-Donat [**45**, p. 53].

THÉORÈME 1.1. — *Si* $\dim(B) = 1$, *on peut choisir* $f' : \mathscr{X}' \to B'$ *comme dans* (1) *de sorte que* B' *et* $\mathscr{X}'$ *soient lisses et les fibres de* f' *soient des diviseurs réduits à croisements normaux stricts dans* $\mathscr{X}'$.

L'assertion que les fibres sont réduites (c'est-à-dire sans multiplicités) est ici essentielle. Quand la base a dimension arbitraire, on dispose encore d'un théorème de réduction semi-stable, démontré dans une variante faible par Abramovich et Karu [**2**] et en toute généralité par Adiprasito, Liu et Temkin [**4**].

THÉORÈME 1.2. — *On peut choisir $f' : \mathscr{X}' \to B'$ comme dans* (1) *de sorte que B' et $\mathscr{X}'$ soient lisses, et f' soit plat à fibres réduites.*

Les énoncés de [**2, 4**] sont plus précis : on peut garantir que f' soit munie d'une structure toroïdale. On en déduit par exemple que les fibres de f' sont Gorenstein [**2**, Proposition 6.5].

Les théorèmes de réduction semi-stable ci-dessus ont l'avantage de donner lieu à des familles $f' : \mathscr{X}' \to B'$ dont l'espace total $\mathscr{X}'$ est lisse. Ils ont cependant plusieurs inconvénients. Ils sont fortement non uniques. Par exemple, dans le cadre du théorème 1.1, on peut sans dommage éclater un point de $\mathscr{X}'$ en lequel f' est lisse. De cette manière, même si le morphisme f est lisse (si $\mathscr{X}_\eta$ a *bonne réduction*), il se peut que f' ne le soit pas. Ainsi, si les singularités des fibres sont très contrôlées, leur géométrie ne l'est pas du tout. Les théorèmes de réduction stable apportent une solution à ce problème.

1.2. Réduction stable pour les familles de courbes

Le premier tel énoncé, pour les familles à un paramètre de courbes, est dû à Deligne et Mumford [**14**] (d'autres preuves ont été données, par exemple dans [**10, 77**]).

DÉFINITION 1.3. — *Une* courbe stable *est une variété projective connexe C de dimension* 1 *dont les singularités sont au plus nodales et dont le faisceau dualisant ω_C est ample. Le genre de C est l'entier $g(C) = h^0(C, \omega_C)$.*

THÉORÈME 1.4. — *Si* $\dim(B) = 1$ *et si $\mathscr{X}_\eta$ est une courbe stable, on peut choisir $f' : \mathscr{X}' \to B'$ comme dans* (1) *de sorte que f' soit plat à fibres des courbes stables, et $\phi_{\eta'}$ soit un isomorphisme.*

De plus, si B' est fixée, un tel $f' : \mathscr{X}' \to B'$ est unique.

Le théorème 1.4 s'applique en particulier quand $\mathscr{X}_\eta$ est une courbe lisse de genre $\geqslant 2$. À la différence du théorème 1.1, il ne restreint pas les singularités de $\mathscr{X}'$. La géométrie des fibres de f' est en revanche très contrainte.

Les énoncés d'unicité et d'existence dans le théorème 1.4 reflètent la séparation et la propreté de l'espace de modules des courbes stables $\overline{M}_g$ (et même, plus précisément, du champ de modules $\overline{\mathscr{M}}_g$ des courbes stables). La propreté de $\overline{\mathscr{M}}_g$ implique à son tour un théorème de réduction stable sur des bases de dimension arbitraire.

THÉORÈME 1.5. — *Si $\mathscr{X}_\eta$ est une courbe stable, on peut choisir $f' : \mathscr{X}' \to B'$ comme dans* (1) *de sorte que f' soit plat à fibres des courbes stables, et $\phi_{\eta'}$ soit un isomorphisme.*

Preuve. — Soit g le genre de $\mathscr{X}_\eta$. Il n'existe pas de famille universelle de courbes stables sur l'espace de modules $\overline{M}_g$. Il résulte en revanche du lemme de Chow pour les champs de Deligne-Mumford [**63**, Théorème 16.6], appliqué au champ de modules $\overline{\mathscr{M}}_g$ des courbes stables, qu'il existe une famille plate $p : \mathscr{C} \to Z$ de courbes stables de genre g telle que le morphisme induit $Z \to \overline{\mathscr{M}}_g$ soit fini et surjectif. Remarquons que Z est propre par propreté de $\overline{\mathscr{M}}_g$. La courbe stable $\mathscr{X}_\eta$ induit un morphisme $\eta \to \overline{\mathscr{M}}_g$. Notons η' une composante irréductible du produit fibré $\eta \times_{\overline{\mathscr{M}}_g} Z$. Soient $\widetilde{B}$ la normalisation de B dans η' et $B' \to \widetilde{B}$ une modification résolvant les indéterminées de l'application rationnelle naturelle $\widetilde{B} \dashrightarrow Z$. Le morphisme $f' : \mathscr{X}' \to B'$ construit en changeant de base $p : \mathscr{C} \to Z$ par le morphisme $B' \to Z$ a les propriétés requises. $\square$

Le théorème 1.5, appliqué à une famille de courbes balayant une variété arbitraire, est un outil crucial dans la preuve du théorème d'altération des singularités de de Jong [**41**] (voir plus précisément [**41**, §2.24, §5.13] ou [**11**, §3.2.3]).

1.3. Réduction stable en dimension supérieure

Nous définirons plus loin une notion de variété stable (définition 2.2) et de famille de variétés stables ou famille stable (définition 2.4) en dimension supérieure, permettant de généraliser les théorèmes 1.4 et 1.5.

Pour l'instant, disons seulement qu'une variété propre et lisse est stable si et seulement si son fibré canonique est ample. C'est une condition bien plus restrictive pour les variétés de dimension $\geqslant 2$ que pour les courbes. Par exemple, les théorèmes ci-dessous ne s'appliquent pas aux familles de variétés de Fano, de variétés abéliennes ou de surfaces $K3$.

THÉORÈME 1.6. — *Si* $\dim(B) = 1$ *et si* $\mathscr{X}_\eta$ *est une variété stable, il existe* $f' : \mathscr{X}' \to B'$ *comme dans* (1) *tel que* f' *soit une famille stable, et* $\phi_{\eta'}$ *soit un isomorphisme.*

De plus, si B' *est fixée, un tel* $f' : \mathscr{X}' \to B'$ *est unique.*

Ce théorème est dû à Hacon et Xu [**36**] quand $\mathscr{X}_\eta$ est normale et à Kollár en général [**53, 54**] (voir §3 pour plus de détails).

Comme dans le cas des courbes, une conséquence géométrique du théorème 1.6 est la propreté des espaces de modules de variétés stables (voir le théorème 2.6). Une fois de tels espaces de modules construits (ce qui est significativement plus dur que pour les espaces de modules de courbes, comme on le verra au § 4), l'argument expliqué dans la preuve du théorème 1.5 permet d'obtenir un théorème de réduction stable sur une base de dimension supérieure.

Théorème 1.7. — *Si $\mathscr{X}_\eta$ est une variété stable, il existe $f' : \mathscr{X}' \to B'$ comme dans* (1) *tel que f' soit une famille stable, et $\phi_{\eta'}$ soit un isomorphisme.*

2. STABILITÉ

Dans cette section, nous définissons et étudions les analogues en dimension supérieure des courbes stables de Deligne et Mumford.

2.1. Variétés stables

On peut penser aux courbes lisses de genre $g \geqslant 2$ qui ne sont pas hyperelliptiques comme plongées, à l'aide de leur fibré canonique, dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^{g-1}$. Si l'on veut aussi prendre en compte les courbes hyperelliptiques, il faut plutôt considérer leur plongement tricanonique dans $\mathbb{P}_k^{5g-6}$. On voudra aussi penser aux variétés stables de dimension supérieure comme étant pluricanoniquement plongées. Ce point de vue va imprégner toute la suite de ce texte. Il explique le rôle prépondérant que vont jouer le faisceau canonique et ses puissances dans la définition des variétés stables.

2.1.1. *Singularités.* — Introduisons tout d'abord la classe des singularités que ces variétés stables pourront porter.

Définition 2.1. — *Une variété X est dite à* singularités semi-log canoniques (slc) *si elle satisfait les conditions* (i)–(v) *suivantes.*

(i) *X est réduite et purement de dimension d,*
(ii) *X est à croisements normaux doubles en codimension 1,*
(iii) *X satisfait la condition S_2 de Serre,*
(iv) *il existe $m > 0$ tel que $\omega_X^{[m]}$ soit inversible,*
(v) *les discrépances des diviseurs au-dessus de X sont $\geqslant -1$.*

Si X est de plus normale ou de manière équivalente par le critère de Serre, si X vérifie :

(ii)$'$ *X est régulière en codimension* 1,

on dit que X est à singularités log canoniques (lc).

Expliquons ces conditions. Que X soit à croisements normaux doubles en codimension 1 signifie qu'il existe un ouvert $U \subset X$ dont le complémentaire a codimension $\geqslant 2$, le long duquel X est soit régulière, soit localement isomorphe (pour la topologie étale ou, si $k = \mathbb{C}$, pour la topologie analytique) à la singularité $\{xy = 0\} \subset \mathbb{A}_k^{d+1}$. Qu'il soit nécessaire d'autoriser de telles singularités est déjà apparent dans le cas des courbes stables.