Séminaire BOURBAKI Juin 2019
71^e année, 2018–2019, n^o 1162, p. 415 à 435
doi:10.24033/ast.1141

TRANSITION DE PHASE ABRUPTE EN PERCOLATION VIA DES ALGORITHMES RANDOMISÉS [d'après Duminil-Copin, Raoufi et Tassion]

par **Marie THÉRET**

INTRODUCTION

Le modèle de percolation a été introduit par Broadbent et Hammersley [7] dans les années 50 pour modéliser un milieu poreux. Par son étude, on s'attache à comprendre comment la porosité du milieu à une échelle macroscopique, *i. e.* à l'échelle d'un morceau de roche tout entier, est créée par la circulation de l'eau à un échelle microscopique. Comme on va le voir par la suite, la porosité du milieu est codée dans le modèle par le choix d'un paramètre $p \in [0, 1]$. C'est un modèle très intéressant du point de vue mathématique, car c'est un des modèles les plus simples qu'on puisse imaginer qui présente un phénomène de transition de phase, c'est à dire un changement drastique des propriétés du système lorsque le paramètre p passe par une valeur critique p_c. Ce modèle a été intensivement étudié depuis son introduction dans les années 50 et continue à l'être, car il est loin d'être encore complètement compris. En particulier, comprendre le comportement du modèle de percolation lorsque $p = p_c$ est un défi que bon nombre de mathématiciens tentent de relever.

Dans cet exposé, nous allons nous intéresser à certaines propriétés de la transition de phase dans le modèle de percolation, qui en font une transition qu'on dit abrupte — on reviendra sur ce terme par la suite. Le caractère abrupt de la transition de phase dans le modèle de percolation classique n'est pas nouveau : ce résultat fondamental est connu depuis les années 80 grâce aux travaux de Menshikov [25] d'une part, et d'Aizenman et Barsky [2] d'autre part. Cependant, les deux preuves proposées dans ces travaux utilisent de façon cruciale des propriétés spécifiques du modèle, ce qui les rend inadaptables à d'autres modèles d'intérêt qui sont des variantes ou des généralisation du modèle de percolation classique. C'est pourquoi le besoin d'inventer une nouvelle technique de preuve s'est fait sentir. Face à ce besoin, deux nouvelles techniques de preuves ont été successivement proposées. La première, imaginée par Duminil-Copin et Tassion [**13, 14**], repose sur le choix d'une définition plus efficacement manipulable du paramètre critique p_c. Cette preuve est très élégante et plus robuste que les preuves de Menshikov et d'Aizenman-Barsky, mais bien qu'elle puisse se généraliser à certains modèles proches du modèle de percolation classique, son application à nombre de modèles d'intérêt restait impossible. La deuxième, proposée tout récemment par Duminil-Copin, Raoufi et Tassion [**12, 10, 11**], repose sur l'utilisation d'algorithmes randomisés. C'est à cette dernière technique de preuve que nous nous intéressons ici.

L'objectif de Duminil-Copin, Raoufi et Tassion étant d'étendre la preuve du phénomène de transition de phase abrupte à d'autres modèles que le modèle de percolation classique, c'est dans le cadre de ces autres modèles qu'ils ont rédigé leurs travaux. L'adaptation de leur méthode à tel ou tel modèle présente des difficultés (éventuellement importantes) propres au modèle considéré. Plutôt que de s'intéresser aux différences qui séparent donc les preuves proposées dans les articles [**12, 10, 11**], notre objectif est au contraire de faire apparaître leur similitude. Pour ce faire, nous allons appliquer leur méthode dans le cas le plus simple, c'est à dire que nous allons exposer la preuve du caractère abrupte de la transition de phase via des algorithmes randomisés dans le cadre de la percolation classique. Nous utiliserons dans cette preuve certains outils mathématiques sans les démontrer (inégalité OSSS, formule de Russo).

1. LE MODÈLE DE PERCOLATION

Le modèle de percolation se construit sur un graphe. Ici nous nous intéresserons exclusivement au graphe $G = (V, E)$ de sites $V = \mathbb{Z}^d$ et d'arêtes E qui désigne l'ensemble des arêtes reliant des sites à distance euclidienne égale à 1. Le paramètre $d \in \mathbb{N}^*$ représente la dimension de l'espace ambiant, et sera dans toute la suite une constante fixée satisfaisant $d \geq 2$. Nous nous donnons également un paramètre $p \in [0,1]$. Aux arêtes de E, nous associons une famille de variables aléatoires $(\omega_e)_{e\in E}$ indépendante et de même loi la loi de Bernoulli de paramètre p. Une arête e est dite ouverte si $\omega_e = 1$, et fermée si $\omega_e = 0$.

Plus formellement, on se donne un espace d'états $\Omega = \{0,1\}^E$, dont tout élément $\omega = (\omega_e)_{e\in E}$ est appelé une configuration de percolation. On considère $\mathscr{F}$ la σ-algèbre des sous-ensembles de Ω générée par les cylindres fini-dimensionnels. Finalement, on se donne sur $(\Omega, \mathscr{F})$ la mesure produit $\mathbb{P}_p = \prod_{e\in E} \mu_e$ où μ_e est la mesure de Bernoulli sur $\{0,1\}$ définie par $\mu_e(\omega_e = 1) = p = 1 - \mu_e(\omega_e = 0)$. On notera $\mathbb{E}_p$ l'espérance associée à cette probabilité.

Une telle configuration $\omega \in \Omega$ peut être vue comme un sous-graphe G_ω du graphe G, de sites $V = \mathbb{Z}^d$ et d'arêtes $\{e \in E \,|\, \omega_e = 1\}$ l'ensemble des arêtes ouvertes pour la configuration ω. Le modèle que nous venons de décrire, abusivement appelé dans l'introduction de cet exposé modèle de percolation classique, correspond plus précisément au modèle dit de percolation de Bernoulli i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$.

L'étude du modèle de percolation correspond à l'étude du graphe aléatoire G_ω ainsi construit, en particulier à ses propriétés de connectivité. En effet, gardons en tête que la percolation modélise un milieu poreux. Vu sous cet angle, les arêtes ouvertes du graphe correspondent à des petits tuyaux microscopiques qui laissent circuler l'eau dans la roche. Le paramètre p correspond à la densité de ces petits tuyaux, donc quantifie la porosité de la roche. Pour que l'eau puisse s'infiltrer dans la roche et la traverser à grande échelle, il faut donc que des points arbitrairement éloignés dans le graphe soient connectés dans G_ω, qui correspond au réseau de tuyaux microscopiques.

Introduisons quelques notations. Pour $x, y \in V$, on notera $\{x \leftrightarrow y\}$ l'évènement « x et y sont connectés dans G_ω ». On notera $\{x \leftrightarrow Y\}$ l'évènement « x est connecté à un site $y \in Y \cap V$ » (pour $Y \subset \mathbb{R}^d$), $\{X \leftrightarrow Y\}$ l'évènement « un site $x \in X \cap V$ est connecté à un site $y \in Y \cap V$ dans G_ω » (pour $X, Y \subset \mathbb{R}^d$), et $\{x \leftrightarrow \infty\}$ l'évènement « la composante connexe de x dans G_ω est infinie ». On notera également $\Lambda_n = [-n, n]^d$ la boîte centrée en l'origine 0 du graphe et de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

Le résultat fondateur dans l'étude du modèle de percolation est l'existence d'une transition de phase, prouvée par Broadbent et Hammersley [**7**] et Hammersley [**18, 19**]. Ce résultat peut s'énoncer comme suit.

THÉORÈME 1.1 (Transition de phase). — *Pour tout $d \geq 2$, il existe un paramètre critique $p_c = p_c(d) \in \,]0, 1[$ tel que :*

- *si $p < p_c$, alors $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$;*
- *si $p > p_c$, alors $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) > 0$.*

On notera dans la suite $\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$. Le fait que $p \mapsto \theta(p)$ soit croissant est une conséquence simple du fait qu'on peut facilement coupler les processus de percolation pour tous les paramètres $p \in [0, 1]$ à la fois. On a trivialement $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$. La partie intéressante du théorème est le fait que $0 < p_c < 1$, ce qui implique l'existence d'une phase sous-critique correspondant à $p < p_c$ et d'une phase sur-critique correspondant à $p > p_c$, séparées par la phase critique correspondant à $p = p_c$.

Ce théorème peut en fait être renforcé comme ceci (voir par exemple la preuve de Burton et Keane [**9**]).

THÉORÈME 1.2 (Existence et unicité de la composante connexe infinie)

Pour tout $d \geq 2$, il existe un paramètre critique $p_c = p_c(d) \in \,]0, 1[$ tel que :

- *si $p < p_c$, alors $\mathbb{P}_p$-p.s. il n'existe pas de composante connexe infinie dans G_ω ;*
- *si $p > p_c$, alors $\mathbb{P}_p$-p.s. il existe une unique composante connexe infinie dans G_ω.*

L'existence d'une composante connexe infinie ne dépend pas de la configuration de percolation sur un ensemble fini d'arêtes, donc la probabilité de cet évènement vaut 0 ou 1 par la loi du $0-1$. La difficulté de ce résultat est de montrer l'unicité p.s. de la composante connexe infinie dans la phase sur-critique.

Deux questions qui viennent naturellement en tête à la lecture de ce théorème sont d'une part quelle est la valeur de p_c, et d'autre part quelles sont les propriétés du graphe G_ω pour $p = p_c$. Ce sont en fait des questions auxquelles il est très difficile de répondre. Pour $d = 2$, nous savons grâce aux travaux de Harris [**20**], Russo [**27**], Seymour et Welsh [**29**] et Kesten [**22**] que $p_c(2) = 1/2$ et que pour $p = 1/2$ p.s. il n'existe pas de composante connexe infinie dans G_ω. Ces deux questions sont ouvertes pour $d = 3$, et prouver l'absence de composante connexe infinie dans la phase critique de percolation en dimension 3 est un des problèmes ouverts majeurs du domaine.

Nous ne pouvons pas présenter ici l'étendue des résultats connus sur le modèle de percolation classique, et nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Grimmett [**17**] qui fait référence sur le sujet.

2. UNE TRANSITION DE PHASE ABRUPTE

Nous avons défini le paramètre critique de percolation p_c en nous intéressant au comportement de $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$. On peut réécrire cette probabilité de deux façons différentes. D'une part, l'évènement $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ est l'intersection des évènements emboîtés $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$, où $\partial\Lambda_n$ désigne le bord de la boîte $\Lambda_n = [-n,n]^d$ de taille n centrée en l'origine, donc

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n),$$

ce qui implique que

$$p_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) = 0\}.$$

Nous manipulerons beaucoup les probabilités qui apparaissent ici, et nous utiliserons les notations suivantes : pour tout $p \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ et $\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(p)$. D'autre part, si on note C la composante connexe de 0 dans G_ω, et $|C|$ le nombre de sites dans C, l'évènement $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ peut aussi se réécrire sous la forme $\{|C| = \infty\}$, d'où

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty)$$

et
$$p_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, |C| < \infty \text{ p.s.}\}.$$
À la lumière de ces réécritures, on se rend compte que d'autres définitions de paramètres critiques, un peu différentes, peuvent s'avérer tout aussi pertinentes, en particulier
$$\hat{p}_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, \mathbb{E}_p[|C|] < \infty\}$$
et
$$\tilde{p}_c = \sup\{p \in [0,1] \,:\, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) = 0\}.$$
Une question d'importance est dès lors de savoir si ces différentes définitions sont équivalentes, c'est à dire s'il y a égalité des points critiques $p_c = \hat{p}_c = \tilde{p}_c$. Outre l'intérêt de la question en soi, il faut préciser que certaines propriétés du modèle ne sont prouvées que sous l'hypothèse $\mathbb{E}_p[|C|] < \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n}) = 0$, et donc l'égalité des points critiques permet d'étendre les propriétés en question à toute la phase sous-critique $p < p_c$.

La réponse à cette question est positive, il y a bien égalité des points critiques :

Théorème 2.1 (Égalité des points critiques). — *Pour tout $d \geq 2$, on a l'égalité suivante :*
$$p_c = \hat{p}_c = \tilde{p}_c.$$

Dans le modèle de percolation de Bernoulli i.i.d. par arêtes sur $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$), l'égalité des points critiques a été démontrée pour la première fois dans les années 80 indépendamment par Menshikov [**25**] et Aizenman et Barsky [**2**]. Une présentation complète des deux preuves se trouve dans le livre de Grimmett [**17**]. La preuve de l'égalité des points critiques repose en fait sur l'étude de la décroissance des probabilités de connexion en régime sous-critique. En effet, pour $p < p_c$, on sait que $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ tend vers $\theta(p) = 0$ quand n tend vers l'infini, mais à quelle vitesse ? Ces mathématiciens ont montré que cette décroissance est exponentiellement rapide en n : c'est ce qu'on appelle un phénomène de transition de phase abrupte (*sharp* en anglais).

Théorème 2.2 (Décroissance exponentielle des probabilités de connexion)

Soit $p < p_c$. Il existe une constante $c(p) > 0$ telle que
$$\theta_n(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c(p)n}.$$

Ce résultat de décroissance exponentielle des probabilités de connexion est fondamental. Là encore, de nombreuses propriétés du modèle de percolation sont prouvées uniquement sous cette hypothèse de décroissance exponentielle, donc le theorème 2.2 implique qu'elles sont valables pour toute la zone sous-critique de percolation. Par ailleurs, en dimension 2, une partie de la preuve de $p_c(2) = 1/2$ de