Séminaire BOURBAKI Juin 2019
71e année, 2018–2019, no 1165, p. 499 à 543
doi:10.24033/ast.1144

INFINITÉ D'HYPERSURFACES MINIMALES EN BASSES DIMENSIONS [d'après F. C. Marques, A. A. Neves et A. Song]

par **Tristan RIVIÈRE**

INTRODUCTION

La recherche de géodésiques fermées, c'est à dire des cercles points critiques de la fonctionnelle de longueur, sur une surface ou une variété de dimension quelconque est au moins aussi ancienne que le calcul de Euler et Lagrange entre 1744 et 1760. Cette recherche trouve une généralisation naturelle en dimension plus grande dans la notion de surfaces minimales qui sont les points critiques du volume parmi les sous variétés de dimension et de topologie donnée. Les problématiques consistant à mettre en évidence des « sous variétés optimales » à un espace donné se sont avérées être des moteurs féconds dans le développement de pans entiers des mathématiques comme le calcul des variation, les équations aux dérivées partielles, la géométrie et la topologie différentielle, les systèmes dynamiques, etc.

Un résultat classique de Marston Morse (voir par exemple [**39**]) affirme que sur certains ellipsoïdes de $\mathbb{R}^3$ il existe exactement 3 géodésiques fermées et simples (plongées). Le but de cet exposé est d'établir qu'un tel résultat de rigidité ne s'étend pas aux dimensions supérieures et que dans toute variété riemannienne lisse, compacte et sans bord de dimension inférieure ou égale à 7, il existe une infinité d'hypersurfaces minimales plongées distinctes (1). Ce théorème dont nous allons décrire les origines et la démonstration récente par Antoine Song est l'aboutissement d'efforts qui nous renvoient aux origines du calcul des variations et des problèmes de *minmax* avec les travaux de Georges Birkoff, Lazar Lyusternik, Lev Shnirelmann, Abram Fet, Marsden

(1) La perte de cette rigidité en dimension supérieure doit être relativisée : si on se restreint aux surfaces minimales de topologie donnée alors on a par exemple le résultat suivant : il existe des métriques voisines de la métrique standard sur S^3 qui admettent exactement 4 sphères minimales plongées ([**61**]). Un résulat de Jürgen Jost dit par ailleurs que toute sphère tridimensionnelle admet au moins 4 sphères minimales plongées [**37**].

Morse, Richard Palais, Stephen Smale... etc, tout comme à la fusion de la théorie de la mesure géométrique [2] avec cette théorie de minmax sous l'impulsion de Fred Almgren et Jon Pitts.

I. LA CONSTRUCTION DE GÉODÉSIQUES PAR MINMAX

Les approches pour construire des géodésiques fermées sont nombreuses et très riches. Une présentation exhaustive de celles-ci et des théories mathématiques qui en découlent va bien au delà de cet exposé. Nous nous contentons de mentionner l'origine des idées qui ont directement influencé la preuve qui nous intéresse aujourd'hui.

Suite au travaux de Jacques Hadamard et d'Henri Poincaré sur le sujet, Georges Birkhoff a développé à la fois des approches de systèmes dynamiques (flot géodésique) mais aussi variationnelles afin de construire des géodésiques fermées dans des variétés simplement connexes ([**10**]). Ces dernières peuvent être revisitées dans l'esprit de la théorie de Morse sur le sujet ainsi qu'au moyen de la théorie des déformations en dimension infinie de Richard Palais et Stephen Smale, dont elles sont à l'origine.

Précisément, étant donnée une sous-variété riemannienne fermée (compacte sans bord) et connexe (M^m, g) de $\mathbb{R}^Q$, dans le cas où $\pi_1(M^m) \neq 0$ l'existence d'une géodésique fermée s'obtient par simple minimisation de l'énergie de Dirichlet

$$E(u) := \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2 \, d\theta$$

dans le sous ensemble de la variété de Hilbert

$$\mathscr{M} := W^{1,2}(S^1, M^m) := \left\{u \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^Q) \ ; \ u(\theta) \in M^m \ \ \forall \theta \in S^1\right\}$$

des éléments u réalisant une classe de conjugaison donnée du π_1 de M^m. L'injection compacte $W^{1,2}(S^1, M^m) \hookrightarrow C^0(S^1, M^m)$ garantit l'existence d'un minimum dans chacune de ses classes qui s'avère être une géodésique fermée paramétrisée à vitesse constante.

Lorsque la variété M^m est simplement connexe l'obtention d'une géodésique fermée s'obtient par un argument variationnel plus élaboré qu'une simple minimisation : un argument dit de *minmax*.

Un résultat classique de la théorie de l'homotopie des variétés compactes donne l'existence de $k \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $\pi_k(M^m) \neq 0$ mais $\pi_l(M^m) = 0$ pour $l \in \{1, \ldots, k-1\}$. On démontre sans trop d'efforts que la variété de Hilbert $\mathscr{M}$ est homotopiquement équivalente à l'espace des chemins fermés $C^0(S^1, M^m)$. On dénote $\Omega_p(M^m)$ l'espace des lacets de M^m, c'est-à-dire l'ensemble des éléments u

(2) La théorie de la mesure géométrique a été motivée à l'origine par la résolution du problème de Plateau dans sa plus grande généralité.

dans $C^0(S^1, M^m)$ tels que $u(0) = p$ où p est un point fixé de M^m. On observe que l'application « évaluation » *ev* de $C^0(S^1, M^m)$ dans M^m qui à u associe $u(0) = u(2\pi)$ est une fibration de Serre de fibre l'espace des lacets $\Omega(M^m)$. Cette projection possède un inverse i qui à un élément quelconque de M associe le chemin constant égal à cet élément. La suite exacte de fibration

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_n(\Omega_p(M^m)) \arrow[r] & \pi_n(C^0(S^1, M^m)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_*"'] & \pi_n(M^m) \arrow[l, bend left=80, "\iota_*"] \arrow[r] & \pi_{n-1}(\Omega_p(M^m)) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

se coupe en morceaux (i.e. $\mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_* = \pi_n(M^m)$, en effet tout élément de $\pi_n(M^m)$ est envoyé par i_* en un élément de $\pi_n(C^0(S^1, M^m))$ et l'on a clairement $\mathrm{ev}_* \circ i_* = \mathrm{id}$) et donne l'identité

$$\pi_n(C^0(S^1, M^m)) = \pi_n(\Omega_p(M^m)) \oplus \pi_n(M^m).$$

On a tautologiquement $\pi_n(\Omega_p(M^m)) = \pi_{n+1}(M^m)$ ce qui donne finalement

$$\pi_n(\mathscr{M}) = \pi_{n+1}(M) \oplus \pi_n(M^m).$$

On a donc en particulier pour l'entier k défini plus haut : $\pi_{k-1}(\mathscr{M}) \neq 0$.[3]

On introduit alors le *problème de minmax* suivant : existe -t-il un point critique non trivial (non égal à une constante) de E qui réalise le nombre donné par

$$W := \inf_{\{u(s,\theta) \in C^0(S^{k-1}, \mathscr{M})\ ;\ [u] \neq 0\}} \ \max_{s \in S^{k-1}} E(u(s, \cdot))\,? \tag{I.1}$$

où $[u]$ désigne la classe d'homotopie de u. Le nombre W est appelé la *largeur* du problème de minmax. La réponse à cette question est positive et sa démonstration donne l'existence d'une géodésique fermée non triviale dans toute variété riemannienne fermée régulière[4].

Il faut d'abord s'assurer que $W > 0$. Si tel n'était pas le cas il existerait alors pour tout $\varepsilon > 0$ un élément $u_\varepsilon \in C^0(S^{k-1}, \mathscr{M})$ tel que $[u_\varepsilon] \neq 0$ et

$$\max_{s \in S^{k-1}} E(u_\varepsilon(s, \cdot)) < \varepsilon.$$

(3) Par exemple, si $M^m = S^2$ on a

$$\pi_1(W^{1,2}(S^1, S^2)) = \mathbb{Z}$$

et un générateur de ce premier groupe d'homotopie est donné par ce que l'on appelle un *balayage de Birkhoff* : la famille continue de chemins sur S^2 obtenue en prenant l'intersection de cette sphère avec tous les plans horizontaux de $\mathbb{R}^3$ « balayant » de haut en bas S^2 exactement une fois, ensuite la boucle est refermée au moyen dune famille continue de chemins constant reliant le pôle sud au pôle nord.

(4) Toute variété fermée et lisse se plonge isométriquement dans un espace euclidien grace à un théorème classique dû à John Nash.

En choisissant ε suffisamment petit (inférieur au rayon de convexité de M^m) on aurait ainsi le fait que pour tout $t \in S^{k-1}$ le chemin $u_\varepsilon(t,\cdot)$ est inclus strictement dans une boule géodésique de M^m. En utilisant l'unicité de la géodésique reliant deux points d'une telle boule et la continuité dans l'espace des chemins de ces géodésiques par rapport à ces deux points pour construire une homotopie déformant $u_\varepsilon(s,\cdot)$ en une suite de chemins constants. Donc $[u_\varepsilon(s,\cdot)] \in \operatorname{Im} \mathrm{ev}_*$ mais comme $\pi_{k-1}(M^m) = 0$ on obtient que $[u_\varepsilon(t,\cdot)] = 0$ ce qui contredit notre hypothèse sur u_ε.

Afin de montrer que W est effectivement la longueur d'une géodésique fermée, on développe des outils qui permettent de déformer les ensembles de niveau de E de façon continue à un « rythme donné » en l'absence de points critique. C'est la théorie des déformations en dimension infinie dite de *Palais Smale*. Dans le cas présent son application est garantie par les faits suivants :

- L'*espace de configuration* $\mathcal{M} := W^{1,2}(S^1, M^m)$ définit une variété de Hilbert régulière, séparable et modelée sur un espace de Hilbert $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^m)$ lui même séparable.
- $\mathcal{M}$ est équipé d'une métrique
$$g(u,v) := \int_0^{2\pi} u \cdot v + \partial_\theta u \cdot \partial_\theta v \; d\theta$$
pour laquelle la variété riemannienne associée $(\mathcal{M}, g)$ est *complète.*
- La fonctionnelle E est de régularité C^1 sur $\mathcal{M}$.
- La fonctionnelle E satisfait la condition de *Palais Smale* [(5)] : Soit
$$u_n \in \mathcal{M} \quad \text{tel que} \quad \limsup_{n \to +\infty} E(u_n) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \nabla E_{u_n} \to 0,$$
alors il existe $u_{n'}$ et $u_\infty \in \mathcal{M}$ tels que
$$u_{n'} \to u_\infty \qquad \text{et} \qquad \nabla E_{u_\infty} = 0.$$

Ces hypothèses étant vérifiées on démontre sans trop de difficultés que le flot ϕ_t associé au champs de vecteur $X := -\nabla E$ sur $\mathcal{M}$ existe *pour tout temps.* S'il n'y avait pas de point critique de E entre les niveau d'énergie $W + \varepsilon$ et $W - \varepsilon$, la condition de Palais Smale nous dirait que $|\nabla E|$ est majorée par en dessous par un nombre strictement positif δ sur $E^{-1}(W - \varepsilon, W + \varepsilon)$. On prend alors un $u \in C^0(S^{k-1}, \mathcal{M})$ tel que $[u] \neq 0$ et satisfaisant
$$\max_{s \in S^{k-1}} E(u(s,\cdot)) < W + \varepsilon.$$
L'application du flot à toute la famille $(u(s,\cdot))_{s \in S^{k-1}}$ simultanément nous fait passer sous le niveau d'énergie $W - \varepsilon$ après le temps $T_0 = 2\varepsilon/\delta$:
$$\max_{s \in S^{k-1}} E(\phi_{T_0}(u(s,\cdot))) < W - \varepsilon.$$

[(5)] Aussi appelée « condition (C) » dans les textes d'origines.

Or, la continuité du flot par rapport au paramètre de temps donne $[\phi_{T_0}(u)] = [u] \neq 0$. Ce qui donne une contradiction et W est bien la longueur d'une géodésique fermée. On a ainsi établi le théorème suivant dû dans sa forme définitive la plus générale à Fet et Lyusternik.

THÉORÈME I.1 ([**43**]). — *Toute variété riemannienne fermée possède une géodésique fermée non constante.*

Dans son article d'origine datant de 1917 Birkhoff n'avait évidemment pas à sa disposition cette théorie de la déformation qui date de la deuxième moitié des années 60. Néanmoins il conçut « à la main », par un argument combinatoire, un processus de déformation des ensembles de niveau d'énergie, le *processus de raccourcissement des courbes* qui peut être vu comme un ancêtre de ce que l'on appelle aujourd'hui les *flots pseudo-gradients*, qui eux-même généralisent $X = -\nabla E$ au cas de fonctionnelles C^1 sur des variétés non plus hilbertiennes mais de Banach munies de structures finslerienne complètes. L'utilisation des flots pseudo-gradients à partir du début des années 70 a elle-même stimulé l'étude des flots géométriques, qui en sont des versions plus précises, et qui ne cessent de prouver leur efficacité pour résoudre diverses questions d'analyse, de géométrie et de topologie différentielle.

II. L'INFINITÉ DE GÉODÉSIQUES DANS UNE VARIÉTÉ FERMÉE

La résolution donnée ci-dessus de l'existence d'une géodésique sur une variété fermée quelconque pose naturellement la question du nombre de ces géodésiques. Au vue de cette résolution il est naturel de procéder à des opérations de minmax de la forme (I.1) en contraignant la classe $[u]$ à appartenir à des groupes d'homotopie non triviaux éventuellement de plus en plus nombreux. La théorie des déformations de Palais-Smale nous permet d'affirmer que chaque valeur de minmax est effectivement réalisée par une géodésiques fermées. Se pose néanmoins la question de la « répétition » de ces géodésiques et il s'agit de savoir si la géodésique obtenue n'est pas le recouvrement multiple d'une autre obtenue précédemment. Une géodésique fermée qui n'est pas le recouvrement d'une géodésique fermée strictement plus courte est appelée *géodésique première.*

Dans le cas à nouveau où le groupe fondamental de la variété M^m possède une infinité de classes de conjugaisons premières (*i.e.* qui ne peuvent être représentées par la composition itérée d'une même classe) alors l'argument de minimisation mentionné plus haut donne l'infinité de géodésiques primitives [(6)].

[(6)] Dans le cas de surfaces compactes hyperboliques $M^m = \Sigma_g$ de genre $g \geq 2$, comme la courbure est négative, un résultat classique affirme que chaque classe du π_1 possède exactement une géodésique. En