CYCLES ANALYTIQUES COMPLEXES II : L'ESPACE DES CYCLES

Daniel Barlet
Jón Magnússon

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 – Luminy
13 288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02 940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 113)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

COURS SPÉCIALISÉS

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
F-75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99   Fax : (33) 01 40 46 90 96
cours_specialises@smf.emath.fr   http://smf.emath.fr

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-907-4

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

COURS SPÉCIALISÉS 27

CYCLES ANALYTIQUES COMPLEXES II : L'ESPACE DES CYCLES

Daniel Barlet
Jón Magnússon

Société Mathématique de France 2020

Daniel Barlet
Professeur à l'Institut Élie Cartan (Nancy) de l'Université de Lorraine et Membre senior de l'Institut Universitaire de France.

Jón Magnússon
Professeur à l'Université d'Islande (Reykjavik).

***Mots clefs.* —** Variété complexe, espace complexe, cycles analytiques, famille de cycles, espace de cycles.

***Classification mathématique par sujets* (2010). —** 32-01, 32-02, 32-C, 32-D, 32-E, 32-F, 32-H.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Nous sommes profondément reconnaissants vis à vis des institutions suivantes sans le soutien desquelles cet ouvrage n'aurait pas vu le jour :

— Université de Lorraine (ex Université H. Poincaré et anciennement Université Nancy 1),
— Université d'Islande,
— Université de Bochum,
— L'Institut Universitaire de France,
— Le Mathematische Institut Oberwolfach, en particulier pour son programme de « Research In Pair »,
— Le CIRM (Centre International de Rencontre Mathématiques de Luminy), en particulier pour son programme de « recherche en binôme »,
— Le programme Franco-Islandais Jules Vernes,
— L'Institut E. Cartan (UMR CNRS 7502),
— Raunvísindastofnun Háskólans.

Ces institutions ont permis et financé de nombreux et fructueux séjours des auteurs à Nancy, à Reykjavik, à Bochum, à Oberwolfach et au CIRM.

Nos remerciements vont également à la Société Mathématique de France qui a accepté de publier cet ouvrage.

Nous tenons également à remercier tous les collègues qui nous ont encouragé pendant cette longue et dure épreuve.

Merci au référé pour ses remarques et sa suggestion d'ajouter quelques applications.

Nos sincères remerciements vont également au sympathique composeur de la SMF qui a fait preuve d'une très grande patience devant les multiples « corrections d'auteurs » que nous avons effectuées après relecture des épreuves de notre texte.

Nancy le 12/05/2020
D. Barlet et J. Magnússon

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Après avoir entrevu au chapitre IV du volume 1 un « espoir de structure » agençant superbement toutes les familles analytiques de cycles compacts d'un espace complexe M donné, il faut maintenant se retrousser les manches et passer à la fabrication de *l'espace des cycles compacts de* M. Ceci est l'objet du chapitre V. Bien sûr, ceux des lecteurs qui veulent seulement utiliser cet outil sans forcément en comprendre tous les rouages pourront simplement survoler ce chapitre, voir même passer directement aux chapitres suivants. Mais il faut quand même dire qu'il y a toujours un prix à payer à ne pas comprendre les outils que l'on utilise (1), bien qu'en l'occurence, l'effort à faire ne soit pas négligeable. Mais si l'on ne se contente pas d'une utilisation dans le style « prêt à servir » de l'outil en question, il n'y a pas de choix (2).

Le chapitre VI introduit un nouveau regard sur les familles analytiques de cycles (en suivant [**B.80-a**]) via les classes fondamentales relatives qui permettent de traduire le phénomène d'isotropie d'une famille analytique de graphes multiformes par l'existence d'un objet cohomologique, la classe fondamentale relative, qui est intrinsèque c'est-à-dire indépendant de la projection considérée. Le résultat important est l'équivalence entre l'existence de cette classe fondamentale relative et le fait que la famille de cycles sous-jacente à la famille de graphes multiformes soit analytique

Malheureusement ce point de vue ne permet pas, semble-t-il, de considérer les espaces de paramètres banachiques (disons que nous avons essayé et que cela n'a pas marché en particulier en raison de contre-exemples que l'on trouvera au chapitre V, §3.4) et donc de mener à bien la construction de l'espace des cycles. Cependant, vu sous cet angle, le difficile théorème de changement de projection isotrope (le théorème γ_1, 6.3.1) devient un corollaire évident de l'équivalence entre isotropie

1. Cette remarque devient de plus en plus actuelle dans notre monde « moderne » …

2. À vrai dire, un certain nombre de collègues ont pu s'en sortir autrement depuis 40 ans : consulter le constructeur ! Mais ce genre de solution ne pourra rester possible que sous réserve de la disponibilité de mathématiciens ayant eux fait l'effort de dominer ce chapitre V !

et existence d'une classe fondamentale relative dans le cas d'une famille analytique de graphes multiformes paramétrée par un espace complexe réduit de dimension finie.

Les chapitre VII et VIII sont consacrés pour l'essentiel à la théorie géométrique (locale) de l'intersection des cycles dans le cadre d'une variété complexe (lisse) pour le chapitre VII et dans le cadre des espaces complexes quasi-lisses pour le chapitre VIII. On montre également que dans le cas d'un espace ambiant quasi-lisse les notions de classe fondamentale et de classe fondamentale relative se généralisent et permettent de caractériser les familles analytiques de cycles. On y montre aussi que la classe fondamentale de l'intersection de deux cycles se coupant proprement est encore donnée par le cup-produit des classes fondamentales comme dans le cas d'un espace ambiant lisse. Mais ceci nécessite le remplacement des faisceaux usuels $\Omega^{\bullet}_{M}$ de formes différentielles holomorphes par les faisceaux $\omega^{\bullet}_{M}$. La première partie du chapitre VIII est donc consacrée à la définition et aux principales propriétés de ces faisceaux dans un espace complexe réduit de dimension pure en suivant l'article **[B.78-b]** dans lequel ils ont été introduits.

Le chapitre IX est consacré à donner la construction de la variété de Chow de l'espace projectif complexe (voir **[C-vW.37]**) et par suite d'une variété algébrique quasi-projective complexe. C'est une construction algébrique globale et nous montrons que la variété de Chow d'une variété algébrique quasi-projective a bien comme espace complexe réduit sous-jacent l'espace des cycles compacts construit au chapitre V de la dite variété algébrique. En fait l'invariance par plongement de l'espace des cycles montre qu'il suffit de vérifier ce point pour l'espace projectif lui-même. Cela donne alors sans effort via le théorème **[GA-GA]** l'indépendance par plongement de la variété de Chow d'une variété algébrique quasi-projective, résultat dont aucune preuve algébrique ne semble avoir été donnée pendant de nombreuses années.

Le chapitre X traite du morphisme de la réduction de l'espace de Douady dans l'espace des cycles qui est l'analogue en géométrie complexe du morphisme

$$\text{(Hilbert-Grothendieck)} \longrightarrow \text{Chow}$$

en géométrie algébrique projective. Nous y donnons en particulier sa version locale qui montre qu'une famille plate de sous-espaces de dimension n d'un espace complexe donné produit une famille analytique de cycles via la correspondance naturelle qui à un sous-espace (en général non réduit) associe le « cycle sous-jacent ». On obtient ainsi l'existence d'une classe fondamentale relative pour une famille plate de sous-espaces de dimension pure dans une variété complexe (et même dans un espace quasi-lisse).

Le chapitre XI traite des problèmes de transfert de convexité d'un espace complexe M à l'espace $\mathcal{C}_n(M)$ de ses n-cycles compacts. Le principe général qui y est illustré est que la n-convexité holomorphe de M implique des propriétés de 0-convexité holomorphe pour l'espace $\mathcal{C}_n(M)$. Cette idée qui est dûe à A. Andreotti et F. Norguet (voir **[A-N.67]**) est mise en évidence par plusieurs résultats globaux et aussi par un résultat local sur le bord d'un ouvert de $C_n(M)$. Le transfert de la convexité a eu plusieurs applications intéressantes en géométrie complexe, voir par exemple [**B.87**], [**Hu-W.10**], [**B-M.98**], *etc.*

Le dernier chapitre est consacré essentiellement aux travaux remarquables de J. Varouchas qui a montré dans un cadre général que l'espace des cycles compacts d'un espace kählérien fort est un espace kählérien fort.

La kählériennité faible de l'espace ambiant permet déjà d'obtenir des résultats intéressants sur l'espace des cycles compacts comme le montrent les travaux de D. Liebermann [**Li.78**], A. Fujiki [**Fu.78**], [**Fu.78-79**], [**Fu.80**], [**Fu.82**] et F. Campana [**Camp.80/81**], [**Camp.80**], [**Camp.81**], [**Camp.85-I**], [**Camp.85-II**], mais la kählériennité forte de l'espace des cycles obtenue par J. Varouchas [**Va.89**] est un outil beaucoup plus puissant. Nous donnons la preuve de ce résultat dans le cas d'un espace ambiant lisse (qui est nettement plus simple). C'est également la clef d'un problème classique dont la solution montre que la classe $\mathscr{C}$ de Fujiki se réduit aux espaces complexes compacts biméromorphes à un espaces kählérien fort (et même à une variété kählérienne compacte en utilisant le théorème de désingularisation de H. Hironaka). Aussi avons-nous introduit la généralisation au cas non compact de la classe $\mathscr{C}$ de Fujiki sous le nom de *classe F-V* (pour Fujiki-Varouchas) et nous avons généralisé à ce cadre un certains nombre de résultats qui sont classiques dans le cadre des espaces complexes compacts de la classe $\mathscr{C}$.

Nous terminons en citant rapidement quelques résultats marquants qui ont été obtenus en utilisant les outils construits dans cet ouvrage.

Nous dédicaçons ce chapitre XII à la mémoire de notre collègue et ami Yannis (Jean) Varouchas qui nous a quittés bien trop tôt.