

425

ASTÉRISQUE

2021

NORMS IN MOTIVIC HOMOTOPY THEORY

Tom BACHMANN & Marc HOYOIS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 425, 2021

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD Fanny KASSEL
Christophe BREUIL Eric MOULINES
Damien CALAQUE Alexandru OANCEA
Philippe EYSSIDIEUX Nicolas RESSAYRE
Christophe GARBAN Sylvia SERFATY
Colin GUILLARMOU
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF AMS
Case 916 - Luminy P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9 Providence RI 02940
France USA
commandes@smf.emath.fr <http://www.ams.org>

Tarifs

Vente au numéro : 45 € (\$ 68)
Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2021

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN 978-2-85629-939-5
doi:10.24033/ast.1147

Directeur de la publication : Fabien Durand

425

ASTÉRIQUE

2021

NORMS IN MOTIVIC HOMOTOPY THEORY

Tom BACHMANN & Marc HOYOIS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Tom Bachmann
Mathematisches Institut
Universität München
Theresienstr. 39
80333 München
Germany
tom.bachmann@zoho.com

Marc Hoyois
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
93040 Regensburg
Germany
marc.hoyois@ur.de

Texte reçu le 28 mai 2018 ; modifié le 8 avril 2020 ; accepté le 27 mai 2020.

Mathematical Subject Classification (2010). — 14F42, 19E15.

Keywords. — Motivic homotopy theory, highly structured ring spectra, norms, multiplicative transfers.

Mots-clefs. — Théorie de l'homotopie motivique, spectres en anneaux hautement structurés, normes, transferts multiplicatifs.

NORMS IN MOTIVIC HOMOTOPY THEORY

by Tom BACHMANN & Marc HOYOIS

Abstract. — If $f: S' \rightarrow S$ is a finite locally free morphism of schemes, we construct a symmetric monoidal “norm” functor $f_{\otimes}: \mathcal{H}_*(S') \rightarrow \mathcal{H}_*(S)$, where $\mathcal{H}_*(S)$ is the pointed unstable motivic homotopy category over S . If f is finite étale, we show that it stabilizes to a functor $f_{\otimes}: \mathcal{SH}(S') \rightarrow \mathcal{SH}(S)$, where $\mathcal{SH}(S)$ is the \mathbb{P}^1 -stable motivic homotopy category over S . Using these norm functors, we define the notion of a *normed motivic spectrum*, which is an enhancement of a motivic E_{∞} -ring spectrum. The main content of this text is a detailed study of the norm functors and of normed motivic spectra, and the construction of examples. In particular: we investigate the interaction of norms with Grothendieck’s Galois theory, with Betti realization, and with Voevodsky’s slice filtration; we prove that the norm functors categorify Rost’s multiplicative transfers on Grothendieck-Witt rings; and we construct normed spectrum structures on the motivic cohomology spectrum HZ , the homotopy K-theory spectrum KGL , and the algebraic cobordism spectrum MGL . The normed spectrum structure on HZ is a common refinement of Fulton and MacPherson’s multiplicative transfers on Chow groups and of Voevodsky’s power operations in motivic cohomology.

Résumé. (Normes en théorie de l’homotopie motivique) — Pour $f: S' \rightarrow S$ un morphisme de schémas fini et localement libre, on construit un foncteur « norme » monoïdal symétrique $f_{\otimes}: \mathcal{H}_*(S') \rightarrow \mathcal{H}_*(S)$, où $\mathcal{H}_*(S)$ est la catégorie homotopique motivique pointée sur S . Si f est un revêtement étale, on montre qu’il se prolonge en un foncteur $f_{\otimes}: \mathcal{SH}(S') \rightarrow \mathcal{SH}(S)$, où $\mathcal{SH}(S)$ est la catégorie homotopique motivique \mathbb{P}^1 -stable sur S . À l’aide de ces foncteurs norme, on définit la notion de *spectre motivique normé*, qui améliore celle de spectre motivique en anneaux E_{∞} . L’objet principal de ce texte est une étude détaillée des foncteurs norme et des spectres motiviques normés, ainsi que la construction de nombreux exemples. En particulier : on étudie la compatibilité des normes avec la théorie de Galois de Grothendieck, avec la réalisation de Betti, et avec la filtration par motifs de Voevodsky ; on montre que les foncteurs norme sont une catégorification des transferts multiplicatifs de Rost entre anneaux de Grothendieck–Witt ; et on construit des structures de spectre normé sur le spectre de la cohomologie motivique HZ , le spectre de la K-théorie algébrique KGL , et le spectre du cobordisme algébrique MGL . La structure de spectre normé sur HZ