ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 54 fascicule 3 mai-juin 2021

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Thomas LANARD

Sur les ℓ-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques II

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
Email : annales@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64. Fax : (33) 04 91 41 17 51
Email : abonnements@smf.emath.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 437 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 600 €. Hors Europe : 686 € ($ 985). Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Fabien Durand
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 54, 2021, p. 683 à 750

SUR LES ℓ-BLOCS DE NIVEAU ZÉRO DES GROUPES p-ADIQUES II

PAR THOMAS LANARD

RÉSUMÉ. – Soient G un groupe p-adique se déployant sur une extension non-ramifiée et $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G de niveau 0 à coefficients dans $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Nous étudions la plus fine décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ en produit de sous-catégories que l'on peut obtenir par la méthode introduite dans [21], la seule méthode connue à ce jour lorsque $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et G n'est pas forme intérieure de GL_n. Nous en donnons deux descriptions, une première du côté du groupe à la Deligne-Lusztig, puis une deuxième du côté dual à la Langlands. Nous prouvons plusieurs propriétés fondamentales comme la compatibilité à l'induction et la restriction parabolique ou à la correspondance de Langlands locale. Les facteurs de cette décomposition ne sont pas des blocs, mais on montre comment les regrouper pour obtenir les blocs « stables ».

ABSTRACT. – Let G be a p-adic group which splits over an unramified extension and $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ the abelian category of smooth level 0 representations of G with coefficients in $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ or $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. We study the finest decomposition of $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ into a product of subcategories that can be obtained by the method introduced in [21], which is currently the only one available when $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ and G is not an inner form of GL_n. We give two descriptions of it, a first one on the group side à la Deligne-Lusztig, and a second one on the dual side à la Langlands. We prove several fundamental properties, like for example the compatibility with parabolic induction and restriction or the compatibility with the local Langlands correspondence. The factors of this decomposition are not blocks, but we show how to group them to obtain "stable" blocks.

1. Introduction

Soient F un corps p-adique et $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F. Notons $G := \mathbf{G}(F)$. Soit ℓ un nombre premier, $\ell \neq p$, et posons $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. On appelle $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans Λ et $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ la sous-catégorie pleine des représentations de niveau 0.

Nous nous intéressons à la décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ en un produit de sous-catégories. Le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est bien connu puisque le théorème de décomposition de Bernstein fournit une décomposition de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ en blocs (c'est à dire en sous-catégories indécomposables).

 doi:10.24033/asens.2468

Le cas réellement intéressant est donc $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Les travaux de Vignéras [30] et Helm [18] (voir également les travaux de Sécherre et Stevens [29]) ont permis d'obtenir une décomposition en blocs de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle s'appuie sur l'« unicité du support supercuspidal » qui n'est pas vraie en général (un contre exemple a été trouvé par Dudas dans Sp_8 sur un corps fini puis relevé en p-adique par Dat dans [11]). Pour pallier ce problème, Dat propose dans [10] une nouvelle méthode, basée sur la théorie de Deligne-Lusztig et des systèmes d'idempotents sur l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple (comme dans [24]), permettant de reconstruire les blocs de $\mathrm{GL}_n(F)$ dans le cas du niveau 0. Nous avons généralisé cette méthode dans [21] au cas d'un groupe réductif connexe défini sur F et déployé sur une extension non-ramifiée de F. Néanmoins cette décomposition n'est en général pas la décomposition en blocs, ni même la décomposition la plus fine que puisse donner la méthode. Dans cet article, nous explicitons cette décomposition la plus fine, et nous en donnons deux interprétations, une première du côté du groupe à la Deligne-Lusztig grâce à des paires $(\mathbf{S},\theta)$ (que l'on définit ci-dessous) puis une deuxième du côté dual à la Langlands.

1.1. Décompositions grâce aux paires $(\mathbf{S},\theta)$

Supposons que $\mathbf{G}$ se déploie sur F^{nr} l'extension non-ramifiée maximale de F. Définissons $\mathscr{P}_\Lambda = \{(\mathbf{S},\theta)\}$ comme l'ensemble des paires $(\mathbf{S},\theta)$, où $\mathbf{S}$ est un F-tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et $\theta : {}^0\mathbf{S}(F)/\mathbf{S}(F)^+ \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ est un caractère d'ordre inversible dans Λ (${}^0\mathbf{S}(F)$ est le sous-groupe borné maximal de $\mathbf{S}(F)$ et $\mathbf{S}(F)^+$ est son pro-p radical).

Nous définissons sur $\mathscr{P}_\Lambda$ trois relations d'équivalence $\sim_\infty$, $\sim_r$ et $\sim_e$ de la façon suivante. On a $(\mathbf{S},\theta) \sim_\infty (\mathbf{S}',\theta')$ s'il existe $g \in \mathbf{G}(F^{\mathrm{nr}})$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que ${}^g\mathbf{S}(F_m) = \mathbf{S}'(F_m)$ et $g(\theta \circ N_{F_m/F}) = \theta' \circ N_{F_m/F}$ (où F_m est l'extension non-ramifiée de degré m de F et $N_{F_m/F}$ est la norme). On définit $\sim_r$ (resp. $\sim_e$) en rajoutant de plus la condition $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\mathbf{S},\theta)$ (resp. et $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^a(\mathbf{S},\theta)$) (où $N^a(\mathbf{S},\theta) \subseteq N^\circ(\mathbf{S},\theta)$ sont certains sous-groupes du normalisateur de $\mathbf{S}$ définis en 3.4). Notons que $\sim_e \Rightarrow \sim_r \Rightarrow \sim_\infty$.

Soit $(\mathbf{S},\theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$, notons $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ des objets dont chacun des sous-quotients irréductibles π vérifie qu'il existe $(\mathbf{S}',\theta') \sim_e (\mathbf{S},\theta)$ et σ une facette F-stable de l'appartement de $\mathbf{S}'$ tels que $\langle {}^*\mathscr{R}_{\mathsf{S}'}^{\overline{\mathbf{G}}_\sigma}(\pi^{G_\sigma^+}), \theta' \rangle_{\mathsf{S}'_\Lambda} \neq 0$, où G_σ^+ est le pro-p radical du sous-groupe parahorique de G en σ, ${}^*\mathscr{R}$ est la restriction de Deligne-Lusztig et S'_Λ est le sous-groupe maximal de S' d'ordre inversible dans Λ. Notons que $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ ne dépend que de la $\sim_e$-classe d'équivalence de $(\mathbf{S},\theta)$.

On obtient alors le théorème suivant, démontré dans la section 3,

1.1.1. THÉORÈME. – *Les catégories* $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ *sont non nulles et fournissent une décomposition*

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{[\mathbf{S},\theta]_e \in \mathscr{P}_\Lambda/\sim_e} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G).$$

1.1.2. REMARQUE. –
1. $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ est « minimale pour la méthode utilisée », c'est à dire en utilisant Deligne-Lusztig et des systèmes d'idempotents. Cependant, ce n'est pas un bloc en général.
2. Lorsque $G = \mathrm{GL}_n(F)$ nous avons $\sim_e = \sim_r = \sim_\infty$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ est un bloc.

Notons que si $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$ plus faible que $\sim_e$ (en particulier $\sim_r$ et $\sim_\infty$) alors en regroupant les catégories $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ selon la $\sim$-équivalence, nous obtenons une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$. Comme dans la théorie de Deligne-Lusztig, nous pouvons associer à une paire $(\mathbf{S},\theta)$ une classe de conjugaison semi-simple dans le dual sur k, le corps résiduel de F, et nous montrons au paragraphe 4.1 qu'on obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{\mathrm{ss},\Lambda} \arrow[d] \\ \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[r, hook] & (\mathbf{G}^*_{\mathrm{ss},\Lambda})^{\mathsf{F}} \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{G}^*$ désigne le dual de $\mathbf{G}$ sur k, le corps résiduel de F, $\mathsf{G}^* = \mathbf{G}^*(k)$ et la notation $(\cdot)_{\mathrm{ss},\Lambda}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples d'ordre inversible dans Λ. Notons que lorsque le groupe $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, les injections horizontales sont des bijections. Ce diagramme nous fournit en particulier des décompositions de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ indexées par $(\mathbf{G}^*_{\mathrm{ss},\Lambda})^{\mathsf{F}}$ et $\mathsf{G}^*_{\mathrm{ss},\Lambda}$ dont nous énoncerons les propriétés dans la section suivante. Pour étudier la relation de $\sim_e$-équivalence, nous ne pouvons pas rester du côté des groupes finis et nous aurons besoin de rajouter des données cohomologiques provenant du groupe p-adique.

1.2. Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_\infty$

Rappelons la définition de $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ l'ensemble des paramètres inertiels modérés de [21]. Notons ${}^L\mathbf{G} := \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rtimes \langle\widehat{\vartheta}\rangle$ le groupe de Langlands dual de $\mathbf{G}$, où $\widehat{\vartheta}$ est un automorphisme de $\widehat{\mathbf{G}}$ (le dual de $\mathbf{G}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) induit par l'action d'un Frobenius inverse. Posons I_F^Λ le sous-groupe fermé maximal de l'inertie de pro-ordre inversible dans Λ. Alors $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ est l'ensemble des classes de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison de morphismes continus $I_F^\Lambda \to {}^L\mathbf{G}$ triviaux sur l'inertie sauvage qui admettent une extension à un L-morphisme admissible $\varphi : W_F' \to {}^L\mathbf{G}$.

Construisons à partir de $(\mathbf{S},\theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ un paramètre inertiel $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Notons $\tilde{\theta}$ un caractère de $\mathbf{S}(F)$ qui relève θ et $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{S}$ le paramètre de Langlands associé à $\tilde{\theta}$ via la correspondance de Langlands locale pour les tores. Choisissons ι un plongement (non-canonique) $\iota : {}^L\mathbf{S} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ qui nous permet d'obtenir un paramètre de Langlands pour $\mathbf{G}$: $\iota \circ \varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$. On pose alors $\phi := (\iota \circ \varphi)|_{I_F^\Lambda}$ ce qui nous donne une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Nous démontrons dans la partie 4 que cette application induit une injection

$$\mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \hookrightarrow \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}),$$

d'image les paramètres « relevants », donnant à son tour une décomposition

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$$

qui est celle de [21, Théorème 3.4.5].