Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 170
Nouvelle série

ESPACES DE CONFIGURATION GÉNÉRALISÉS

ESPACES TOPOLOGIQUES *i*-ACYCLIQUES

SUITES SPECTRALES BASIQUES

A. ARABIA

2 0 2 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 50 € ($ 75)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 167 €, hors Europe : 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memoires@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN papier 0249-633-X ; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-934-0

doi:10.24033/msmf.478

Directeur de la publication : Fabien DURAND

MÉMOIRES DE LA SMF 170

ESPACES DE CONFIGURATION GÉNÉRALISÉS
ESPACES TOPOLOGIQUES i-ACYCLIQUES
SUITES SPECTRALES BASIQUES

Alberto Arabia

Société Mathématique de France 2021

A. Arabia

Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.

40, rue Pascal, 75013, Paris.

E-mail : `alberto.arabia@imj-prg.fr, alberto.arabia@gmail.com`

Url : `http://webusers.imj-prg.fr/~alberto.arabia/`

Reçu le 26 juillet 2018, révisé le 28 octobre 2019, accepté le 31 octobre 2019.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 55R80, 20-XX, 20.20, 20C30, 18G40, 55-XX, 55R20, 11B73.

Mots-clefs. – Caractère polynomial, cohomologie intérieure, espaces i-acycliques, espaces de configuration, FI-modules, fonction de Möbius, groupes de permutations, groupes symétriques, nombres de Stirling, stabilité de représentation, suie spectrale de Leray, suite spectrale basique.

Key words and phrases. – Basic spectral sequences, configuration spaces, FI-modules, i-acyclic spaces, interior cohomology, Leray spectral sequence, Möbius function, polynomial family of characters, permutation group, representation stability, Stirling numbers, symmetric groups.

ESPACES DE CONFIGURATION GÉNÉRALISÉS ESPACES TOPOLOGIQUES i-ACYCLIQUES SUITES SPECTRALES BASIQUES

Alberto Arabia

Résumé. – Ce mémoire présente une nouvelle approche pour l'étude de la cohomologie à supports compacts des espaces de configuration *généralisés*

$$\Delta_{\leqslant \ell} M^m := \big\{(x_1, \ldots, x_m) \in M^m \;\big|\; \#\{x_1, \ldots, x_m\} \leqslant \ell\big\},$$
$$\Delta_\ell M^m := \Delta_{\leqslant \ell} M^m \setminus \Delta_{<\ell} M^m \;\text{ et }\; F_m(M) := \Delta_m M^m,$$

pour les espaces localement compacts M. L'approche comporte deux volets.

Le premier s'applique uniquement aux espaces i-acycliques, dont la classe contient les espaces contractiles non compacts, et, si X est i-acyclique, contient aussi les ouverts de X et les produits $X \times M$ par tout espace M. Pour un espace i-acyclique X, étant donnés $i, m \in \mathbb{N}$, les familles de représentations des groupes de permutations $\big\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(F_{m-a}(X)) \;\big|\; a \leqslant m\big\}$ et $\big\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(X^{m-a}) \;\big|\; a \leqslant m\big\}$ se trouvent entrelacées par une matrice universelle de foncteurs d'induction de la catégorie de FI-modules. Cette propriété remarquable permet de transposer certaines questions sur la première famille en termes de la seconde, où elles sont, *a priori*, plus simples à étudier. Cela permet d'exprimer le caractère du $\mathcal{S}_m$-module module par une formule universelle dépendant uniquement du quadruplet $(?, i, \ell, m)$ et des nombres de Betti compacts de X. La méthode nous permet également d'étendre les théorèmes de stabilité de Church aux familles $\mathcal{D}_?(a) := \big\{\Delta_{?m-a} X^m\big\}_{m \geqslant a}$.

Le deuxième volet décrit un procédé qui permet l'extrapolation des propriétés cohomologiques des espaces de configuration pour les espaces i-acycliques X aux espaces topologiques généraux M. L'outil principal est la *suite spectrale basique* qui converge vers $H_c(F_m(M))$ et dont la première page est constituée de représentations induites des divers $H_c(F_{m-a}(M \times \mathbb{R}))$, pour $0 \leqslant a \leqslant m$. La suite spectrale a suffisamment de fonctorialité pour suivre, page après page, les différents rangs de monotonie et stabilité de ses termes, permettant ainsi l'estimation de ceux de son aboutissement. Comme application du procédé, les théorèmes de stabilité de représentations connus pour les familles $\big\{F_m(M)\big\}_m$ où M est une variété topologique, sont généralisés aux familles