Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

RÉDUCTION EN FAMILLE D'ESPACES AFFINOÏDES

Antoine Ducros

Tome 149
Fascicule 4

2021

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 547-611

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 149, décembre 2021

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
149 (4), 2021, p. 547-611

RÉDUCTION EN FAMILLE D'ESPACES AFFINOÏDES

PAR ANTOINE DUCROS

RÉSUMÉ. — Soit k un corps ultramétrique complet. Nous démontrons un substitut au théorème de la fibre réduite (de Bosch, Lütkebohmert et Raynaud) valable pour tout morphisme $Y \to X$ plat et à fibres géométriquement réduites entre espaces k-affinoïdes au sens de Berkovich, sans supposer que X et Y sont stricts ni que la dimension relative de Y sur X est constante. Nous ne faisons pas appel au théorème de la fibre réduite original, ni aux techniques ou au langage de la géométrie formelle. Notre énoncé est formulé en termes de réduction graduée à la Temkin ; notre preuve repose sur un théorème de finitude de Grauert et Remmert et sur la théorie de la réduction (graduée) des germes d'espaces analytiques, due à Temkin.

Texte reçu le 14 avril 2019, modifié le 7 juillet 2021, accepté le 7 octobre 2021.

ANTOINE DUCROS, Sorbonne Université, Université Paris-Diderot, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75005, Paris, France • *E-mail :* `antoine.ducros@imj-prg.fr` • *Url :* `http://www.imj-prg.fr/~antoine.ducros`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G22, 14G99.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich, réduction des espaces affinoïdes, réduction de la fibre réduite.

Lors de la rédaction de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien de l'ANR à travers les projets *Valuations, combinatoire et théorie des modèles* (ANR-13-BS01-0006), et *Définissabilité en géométrie non archimédienne* (ANR-15-CE40-0008), ainsi que de celui de l'IUF dont il était membre junior d'octobre 2012 à octobre 2017. Il a aussi profité en mars 2019 de l'hospitalité de l'université hébraïque de Jérusalem, avec le soutien du projet ERC Consolidator 770922 (BirNonArchGeom) de Michael Temkin.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2021/547/$ 5.00

doi:10.24033/bsmf.2838

Abstract (*Reduction of affinoid spaces in family*). — Let k be a non-archimedean complete field. We prove a substitute for the reduced fiber theorem (of Bosch, Lütkebohmert and Raynaud) that holds for every morphism $Y \to X$ flat and with geometrically reduced fibers between k-affinoid spaces in the sense of Berkovich, without assuming that X and Y are strict, nor that the relative dimension of Y over X is constant. We do not use the original reduced fiber theorem, nor the language or the techniques of formal geometry. Our statement is formulated in terms of Temkin's graded reduction; our proof rests on a finiteness result of Grauert and Remmert and on Temkin's theory of (graded) reduction of germs of analytic spaces.

0. Introduction

Soit k un corps ultramétrique complet ; nous travaillerons avec la théorie des espaces k-analytiques au sens de Berkovich ([2], [3]). Fixons un sous-groupe Γ de $\mathbf{R}_{>0}$, non trivial si $|k^\times| = \{1\}$; pour simplifier la présentation, supposons que Γ est divisible. Soit A une algèbre affinoïde Γ-*stricte*, c'est-à-dire quotient d'une algèbre de la forme $k\{T_1/r_1, \ldots, T_n/r_n\}$ où les r_i appartiennent à Γ ; soit $\|\cdot\|$ la semi-norme spectrale de A (qui est une norme si et seulement si A est réduite). Lorsque $\Gamma = \{1\}$ on associe classiquement à l'algèbre A sa *réduction*

$$\widetilde{A} := \{a \in A, \|a\| \leq 1\}/\{a \in A, \|a\| < 1\}.$$

Lorsque Γ n'est pas supposé trivial cette définition garde un sens, mais l'anneau obtenu est en général trop petit pour être exploitable (par exemple, si les r_i sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants modulo $|k^\times|^{\mathbf{Q}}$, la réduction de $k\{T_1/r_1, \ldots, T_n/r_n\}$ au sens précédent est simplement le corps résiduel de k). Le bon objet à considérer dans ce cas est la réduction *graduée* de A introduite par Temkin dans [29].

Avant de donner sa construction, précisons que pour éviter une répétition fastidieuse des adjectifs «homogène» et «gradué», nous avons opté pour un formalisme qui diffère en apparence de celui de Temkin, tout en lui étant rigoureusement équivalent : nous définissons un *annéloïde* comme une *union disjointe* $R = \coprod_{r\in\Gamma} R^r$ où chaque R^r est un groupe abélien noté additivement, munie d'une collection d'applications bi-additives $R^r \times R^s \to R^{rs}$ définissant sur R une loi commutative, associative, et possédant un élément neutre $1 \in R^1$. Un *corpoïde* est un annéloïde non nul dans lequel tout élément non nul est inversible. La plupart des définitions et résultats de base de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique (idéaux, idéaux premiers, produit tensoriel, valuations, spectres et même schémas, etc.) admettent des avatars dans ce nouveau cadre, que nous utiliserons librement dans ce qui suit ; nous renvoyons à la section 1 pour davantage de précisions.

Soit A une algèbre k-affinoïde Γ-stricte ; posons $X = \mathscr{M}(A)$. On définit d'après Temkin la *réduction graduée* (ou encore l'*annéloïde résiduel*) $\widetilde{A}$ de A par la formule

$$\widetilde{A} := \coprod_{r \in \Gamma} \{a \in A, \|a\| \leq r\} / \{a \in A, \|a\| < r\}.$$

C'est une algèbre de type fini sur le *corpoïde résiduel* $\widetilde{k}$ de k ; par exemple, si A est égale à $k\{T_1/r_1, \ldots, T_n/r_n\}$ alors $\widetilde{A} = \widetilde{k}[r_1 \setminus T_1, \ldots, r_n \setminus T_n]$, qui désigne l'algèbre commutative libre engendrée sur $\widetilde{k}$ par des indéterminées $T_1, \ldots, T_n$ de degrés respectifs $r_1, \ldots, r_n$ (1.3). Si a est un élément de A tel que $\|a\| \in \Gamma$, nous noterons $\widetilde{a}$ son image dans $\widetilde{A}^{\|a\|}$. Nous désignerons par $\widetilde{X}$ le spectre de $\widetilde{A}$. La dimension de $\widetilde{X}$ est égale à celle de X, et l'on dispose d'une application anti-continue surjective naturelle $X \to \widetilde{X}$.

Cette opération de réduction (graduée) des espaces affinoïdes est un outil majeur en géométrie analytique, qui permet de convertir un certain nombre de questions en des problèmes de géométrie algébrique (éventuellement graduée, mais on se ramène ensuite le plus souvent par des méthodes standard décrites à la section 1 à la géométrie algébrique usuelle). Elle est toutefois un peu délicate à utiliser, car si elle est fonctorielle, elle ne commute pas aux opérations usuelles. En effet, soient X et Y deux espaces k-affinoïdes Γ-stricts, et soit Z un espace affinoïde Γ-strict sur une extension de k. Supposons donnés deux morphismes $Y \to X$ et $Z \to X$. On dispose alors d'un morphisme naturel $\widetilde{Y \times_X Z} \to \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \times \widetilde{Z}$ qui est fini, mais n'est pas un isomorphisme en général. En particulier (prendre $Z = \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ où $x \in X$) *la formation de la réduction ne commute pas à la formation des fibres.* Cet article remédie dans certaines situations à ce dernier point.

Avant de décrire plus avant nos résultats, commençons par une définition. Soit $A \to B$ un morphisme entre algèbres k-affinoïdes Γ-strictes. Posons $X = \mathscr{M}(A)$ et $Y = \mathscr{M}(B)$. Une présentation $B \simeq A\{T_1/r_1, \ldots, T_n/r_n\}/(a_1, \ldots, a_m)$ de B sur A (ou de Y sur X) est Γ-*sympathique* si les r_i appartiennent à Γ et si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(1) pour tout i compris entre 1 et m, la semi-norme spectrale ρ_i de a_i appartient à Γ ;

(2) le morphisme

$$p\colon \operatorname{Spec} \widetilde{A}[r \setminus T]/(\widetilde{a_1}, \ldots, \widetilde{a_m}) \to \widetilde{X}$$

est plat (nous avons écrit $\widetilde{A}[r \setminus T]$ pour $\widetilde{A}[r_1 \setminus T_1, \ldots, r_n \setminus T_n]$) ;

(3) les fibres de p sont géométriquement réduites ;

(4) pour tout $x \in X$ la norme spectrale de $a_i|_{Y_x}$ est égale à ρ_i quel que soit i, et tout élément $a \in \mathscr{H}(x)\{T/r\}$ appartenant à l'idéal engendré par les $a_i|_{Y_x}$ possède une écriture de la forme $\sum b_i(a_i|_{Y_x})$ telle que $\|b_i\| \cdot \rho_i \leq \|a\|$ pour tout i ;