Séminaire BOURBAKI Novembre 2019
72e année, 2019–2021, no 1166, p. 1 à 26
doi : 10.24033/ast.1155

LA DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE L'ENTROPIE POSITIVE D'HERMAN [d'après Berger et Turaev]

par **Marie-Claude Arnaud**

1. INTRODUCTION

Ce texte traite de l'entropie métrique pour la mesure de Lebesgue en dimension 2, une quantité qui mesure le chaos détecté par la mesure de Lebesgue pour un système dynamique différentiable la préservant. Bien longtemps, les seuls exemples connus d'entropie métrique positive [1] ont été les systèmes Anosov (appelés aussi uniformément hyperboliques), définis sur le tore 2-dimensionnel. D'autres exemples ont suivi dans les années 80, construits par Katok (1980), sur toute surface, mais toujours élaborés à partir des Anosov, et toujours loin de l'identité au sens de la topologie C^1. Au Congrès international des mathématiciens de 1998, Herman énonce la conjecture suivante.

Conjecture 1.1 (Herman). — *Soit* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$ *l'ensemble des difféomorphismes du disque de classe* C^∞ *qui préservent l'aire. Dans tout voisinage de l'identité dans* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$*, il existe un difféomorphisme d'entropie métrique positive.*

Une autre conjecture fameuse de l'entropie positive, qui concerne la famille standard des difféomorphismes du tore définis par $f_\lambda(x,y) = (2x-y+\lambda\sin 2\pi x, x)$, a été énoncée par Sinai (1994).

Conjecture 1.2 (Sinai). — *Pour tout paramètre* $\lambda \neq 0$*, l'entropie métrique de* f_λ *est positive.*

En ce qui concerne la conjecture 1.2, on ne sait démontrer pour aucun paramètre λ que l'entropie est positive, même si les simulations numériques semblent montrer des mers de chaos.

La conjecture 1.1 vient d'être démontrée par Berger et Turaev (2019), dans un véritable tour de force et l'objet de ce texte et de présenter leur démonstration.

Après avoir rappelé ce qu'est l'entropie métrique, nous commencerons par décrire ce que Berger et Turaev appellent les îlots stochastiques, qui généralisent un exemple dû

1. Ici, positive signifie strictement positive.

à Przytycki (1982). Ces objets, porteurs d'entropie positive, sont fragiles et ne résistent pas aux perturbations. Berger et Turaev construisent un îlot stochastique qui résiste à un certain type de perturbations qu'ils introduisent, dites relatives aux liens. Nous parlerons alors de renormalisation et expliquerons comment l'existence de bandes homoclines pour un point périodique hyperbolique permet de créer par perturbation des dynamiques qui, renormalisées, sont très proches de n'importe quelle dynamique (par exemple de l'îlot stochastique de Berger et Turaev). Une partie des méthodes utilisées ici ont été développées par Turaev (2003), dans le contexte des dynamiques universelles et par Gonchenko, Shilnikov et Turaev (2008), pour étudier les domaines de Newhouse. Il s'agit de la partie la plus technique de la preuve. Finalement, nous montrerons comment construire dans tout voisinage de l'identité un difféomorphisme f ayant une bande homocline, ce qui permettra d'injecter une dynamique proche de l'îlot stochastique de Berger et Turaev comme renormalisée de f. Il faudra ensuite restaurer l'îlot stochastique. Cette dernière étape utilise un opérateur astucieusement défini pour évaluer l'écart entre deux branches de variétés invariantes.

Remords. — L'élément central de l'exposé est la démonstration de la conjecture de Herman. Mais en vérité, Berger et Turaev démontrent plus que cette conjecture et montrent le résultat suivant :

Soit f un difféomorphisme préservant l'aire qui a un point périodique non hyperbolique et V un voisinage de f en topologie C^∞. Alors V contient un difféomorphisme préservant l'aire d'entropie métrique positive.

Ceci leur permet de progresser vers la conjecture suivante.

Conjecture 1.3 (Berger & Turaev). — *Il existe un ensemble dense de* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$ *dont tout élément est d'entropie métrique positive.*

Je remercie chaleureusement Sylvain Maillot pour sa relecture de cet exposé et ses précieux conseils, ainsi que Pierre Berger et Sylvain Crovisier qui m'ont aidé à améliorer tant le texte que les illustrations. Merci aussi à toute l'équipe éditoriale qui fait un travail remarquable dans un délai très resserré.

2. PARLONS D'ENTROPIES

Un *système dynamique discret* est la donnée d'une transformation (bijection)

$$f : X \longrightarrow X$$

d'un ensemble X muni d'une structure dont on étudie les itérées $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier,

- si X est un espace métrique, f est un homéomorphisme ;
- si X est un espace de probabilité, f est mesurable et préserve la probabilité.

Pour introduire une notion de complexité d'un tel système, on s'intéresse aux « morceaux finis » d'orbites $(f^i x)_{0\le i\le n} \in X^{n+1}$ de longueur $n \in \mathbb{N}$ et on regarde ce qui se passe quand n tend vers $+\infty$. Étant donné un recouvrement ouvert ou mesurable

$$X = \bigcup_{0\le i\le m} X_i$$

de X, chaque morceau fini d'orbite $(f^i x)_{0\le i\le n}$ possède au moins un *itinéraire*

$$\big(n_i(x)\big)_{0\le i\le n} \in [0,m]^{n+1}$$

qui vérifie $f^i(x) \in X_{n_i(x)}$. On note

$$\mathcal{I}\big((X_i), f, n\big) \subset [0,m]^{n+1}$$

l'ensemble de tous les itinéraires pour f. Si les X_i forment une partition et pas seulement un recouvrement, chaque morceau d'orbite a un unique itinéraire $I(x)$ et l'entropie de f en temps n relativement à la partition (X_i) est alors le logarithme du nombre [2] des itinéraires.

$$h\big((X_i), f, n\big) = \log\big|\mathcal{I}\big((X_i), f, n\big)\big|.$$

Si les X_i forment seulement un recouvrement, on choisit

$$\mathcal{J}\big((X_i), f, n\big) \subset \mathcal{I}\big((X_i), f, n\big)$$

de cardinal minimal tel que chaque morceau d'orbite de longueur n a un itinéraire dans $\mathcal{J}((X_i), f, n)$, et on note

$$h\big((X_i), f, n\big) = \log\big|\mathcal{J}\big((X_i), f, n\big)\big|.$$

Dans les deux cas, la quantité $h((X_i), f, n)$ est sous-additive en n et la quantité

$$h\big((X_i), f\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h\big((X_i), f, n\big)$$

existe. C'est l'entropie de f relativement au recouvrement (X_i), qui mesure donc le taux de croissance exponentiel du nombre d'itinéraires en fonction de n. On a ainsi [3]

$$\mathcal{J}\big((X_i), f, n\big) \propto \exp\big(nh\big((X_i), f\big)\big).$$

Quand X est un espace métrique et f un homéomorphisme, l'*entropie topologique* $h_{\mathrm{top}}(f)$ de f est alors le supremum des $h((X_i), f)$ pour (X_i) parcourant l'ensemble des recouvrements ouverts de X.

Cette définition d'entropie topologique est due à Adler, Konheim et McAndrew (1965) qui s'inspiraient de la définition d'entropie métrique de Kolmogorov que nous donnons plus loin. Une définition équivalente souvent plus maniable pour traiter les exemples fut introduite indépendamment par Dinaburg (1971) et Bowen (1970) par la suite.

Exemple 2.1. Une isométrie d'un espace métrique compact est d'entropie topologique nulle.

2. Les barres $|\bullet|$ servent à désigner le cardinal.
3. Le signe $\propto$ signifie que le logarithme du rapport des deux quantités est négligeable devant n.

Quand (X, μ) est un espace de probabilité et f est une bijection mesurable qui préserve μ, on définit l'entropie métrique en tirant parti de la mesure. Pour $(X_i)_{0\leq i\leq m}$ partition mesurable, pour chaque $I \in \mathcal{I}((X_i), f, n)$, on note X_I l'ensemble des points de X d'itinéraire I. L'entropie métrique de f en temps n relativement à la partition (X_i) est alors

$$h\big((X_i), f, \mu, n\big) = -\sum_{I\in\mathcal{I}} \mu(X_I)\log\big(\mu(X_I)\big).$$

C'est l'intégrale de la fonction $x \in X \mapsto -\log \mu(X_{I(x)})$. On a alors [4]

$$h\big((X_i), f, \mu, n\big) \leq \log\left|\mathcal{I}\big((X_i), f, n\big)\right| = h\big((X_i), f, n\big)$$

avec égalité seulement dans le cas particulier où les X_I sont équiprobables. L'entropie métrique de f relativement à la partition (X_i) est

$$h\big((X_i), f, \mu\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h\big((X_i), f, \mu, n\big).$$

L'*entropie métrique* $h_\mu(f)$ de f est le supremum des $h((X_i), \mu, f)$ pour (X_i) parcourant l'ensemble des partitions mesurables de X. Cette notion, antérieure à la notion d'entropie topologique, fut introduite par KOLMOGOROV (1985), qui s'inspirait des travaux de Shannon concernant la théorie de l'information.

On suppose que X est un espace métrique compact et que f en est un homéomorphisme. L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des probabilités boréliennes de X est muni de la topologie faible et l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des probabilités boréliennes invariantes par f est alors un compact non vide. GOODWYN (1971) a montré l'inégalité variationnelle

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(f), \quad h_\mu(f) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Il est donc possible que l'entropie d'une mesure particulière soit nulle et que l'entropie topologique soit positive [5,6], alors que l'inverse est impossible. KATOK (1980) a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$ d'une surface soit d'entropie topologique positive : un tel difféomorphisme a un fer à cheval [7]. Or, il y a de très nombreux difféomorphismes qui ont un fer à cheval. Dans un travail en cours, Le Calvez et Sambarino montrent que si M est une surface compacte munie d'une forme d'aire, pour tout $k \in [1, \infty]$, il existe un ouvert dense de l'ensemble des difféomorphismes de classe C^k de M qui préservent l'aire dont tout élément a un fer à cheval. Précisons qu'un fer à cheval est un ensemble de Cantor [8] et qu'il est donc petit au sens de la topologie car c'est un fermé d'intérieur vide.

4. C'est une conséquence de la convexité de la fonction $x \mapsto x \cdot \log(x)$.

5. Les deux notions d'entropie sont toujours positives ou nulles. Pour ne pas alourdir le texte et en suivant la terminologie anglaise, nous avons omis le terme strictement devant positive, mais dans ce texte positive signifiera toujours strictement positive.

6. Pour un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété compacte, les deux types d'entropie sont finies.

7. Le fer à cheval est un ensemble compact invariant qui apparait quand les variétés stable et instable d'un point périodique hyperbolique s'intersectent transversalement ailleurs qu'en ce point. Il fut construit par SMALE (1965).

8. Rappelons qu'un ensemble de Cantor est un ensemble non vide, compact, totalement discontinu et sans point isolé. Il a donc la puissance du continu.

Plaçons-nous donc dans le cas d'une surface compacte munie d'une forme d'aire, par exemple le disque unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la mesure de Lebesgue. Désormais, nous ne nous intéresserons à l'entropie métrique que pour la mesure associée à la forme d'aire. On sait alors que l'entropie topologique de la plupart (au sens de la catégorie de Baire) des difféomorphismes du disque qui préservent l'aire est positive. Ceci n'implique bien sûr pas que leur entropie métrique (pour la mesure de Lebesgue) est positive.

Connaissons-nous beaucoup de difféomorphismes d'entropie métrique positive ? En 1977, Pesin a fait le lien entre l'entropie métrique pour une mesure de Lebesgue et le taux exponentiel avec lequel des points proches s'éloignent sous l'action dynamique, *i.e.* les taux de divergence des différentielles Df^n. Ceux-ci s'appellent les *exposants de Lyapunov*. Plus précisément, pour un difféomorphisme f qui préserve une mesure de probabilité μ équivalente à une forme volume, le fibré tangent peut se décomposer comme somme directe $\bigoplus E_i(x)$ de fibrés mesurables Df-invariants sur un ensemble de μ-mesure 1 et pour chaque $v \in E_i(x)$ non nul, la limite suivante existe et est indépendante de v :

$$\lambda_i(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\|Df^n(x)v\|\right).$$

Il s'agit des exposants de Lyapunov au point x.

Pesin (1977) montre que si f est un difféomorphisme de classe au moins C^2 d'une variété qui préserve une mesure μ équivalente à une forme volume, alors l'entropie est égale à la somme des exposants de Lyapunov positifs, *i.e.*

$$h_\mu(f) = \int \sum \lambda_i^+(x) \dim E_i(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

où les λ_i^+ sont les exposants de Lyapunov positifs et $\dim E_i(x)$ la multiplicité de $\lambda_i^+(x)$. Ceci permet de construire des exemples de difféomorphismes d'entropie métrique positive pour la mesure de Lebesgue.

Exemple 2.2. La transformation du tore 2-dimensionnel

$$f : \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \longrightarrow T^2, \quad f(\theta_1, \theta_2) = (2\theta_1 + \theta_2, \theta_1 + \theta_2)$$

a pour entropie $\log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ puisque les valeurs propres de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Cet exemple appartient à la classe plus vaste des difféomorphismes Anosov, ceux pour lesquels on peut écrire le tangent à la variété comme somme directe de deux sous-fibrés Df-invariants $E^s \oplus E^u$, l'un suivant lequel Df contracte et l'autre suivant lequel Df dilate. On sait que la seule surface compacte qui porte un difféomorphisme Anosov est le tore $\mathbb{T}^2$ et qu'un difféomorphisme Anosov n'est pas homotope à l'identité, et donc est loin de l'identité. On sait aussi qu'être Anosov est une propriété stable par perturbation C^1 petite, et on obtient donc un ouvert de difféomorphismes dont l'entropie métrique est positive. Nous n'avons aucune raison de penser que les exemples présentant de l'entropie métrique positive que nous allons construire par la suite ont un voisinage en topologie C^∞ dont les éléments ont la même propriété, mais nous ne savons démontrer ni la véracité de ceci ni son contraire.