

UN LEMME DE FERMETURE  $C^\infty$   
[d'après Asaoka et Irie]

par Vincent Humilière

1. CONTEXTE ET ÉNONCÉS PRINCIPAUX

1.1. Qu'est-ce qu'un lemme de fermeture ?

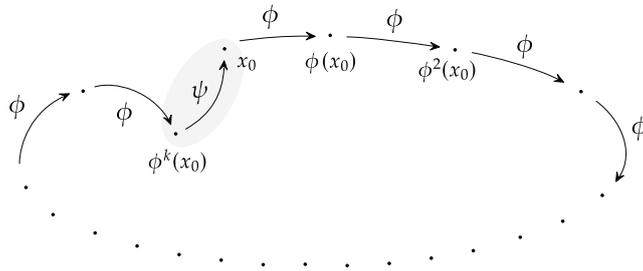
On appelle « lemme de fermeture » (ou « closing lemma ») tout énoncé du type suivant : *Étant donné un système dynamique, pour tout point  $x_0$  vérifiant une certaine forme de récurrence, il est possible de perturber la dynamique de telle sorte que le système perturbé admette une orbite périodique passant par  $x_0$ .*

Précisons les termes employés. Qu'entend-on d'abord par système dynamique ? Il peut s'agir d'un difféomorphisme  $\phi$  d'une variété différentiable. L'orbite par  $\phi$  d'un point  $x_0$  est alors la suite de points  $(\phi^k(x_0))_{k \in \mathbb{Z}}$  (où  $\phi^k = \phi \circ \dots \circ \phi$  est obtenue en composant  $k$  fois  $\phi$ ). Le paramètre  $k$  est ici le « temps » du système. Il peut également s'agir d'un champ de vecteurs  $X$  sur une variété différentiable, l'orbite d'un point  $x_0$  est alors l'unique solution maximale du problème de Cauchy  $\dot{x}(t) = X(x(t))$ ,  $x(0) = x_0$ . C'est donc une courbe passant par  $x_0$  et partout tangente au champ  $X$ . Le « temps » est bien sûr ici  $t$ .

Un point  $x_0$  est dit *récurrent* s'il est point d'accumulation de son orbite future (c'est-à-dire son orbite restreinte aux temps strictement positifs). Par exemple, un point *périodique*, c'est-à-dire dont l'orbite est périodique, est un point récurrent. Intuitivement, l'orbite d'un point récurrent  $x_0$  revient dans le futur aussi proche que l'on veut de  $x_0$ . L'orbite d'un tel point est donc presque fermée, ce qui justifie que l'on puisse espérer la fermer véritablement par une petite perturbation. Il existe des formes de récurrence plus faible, comme le fait d'être non-errant ou récurrent par chaînes, donnant lieu à d'autres variantes potentielles de closing lemma.

Enfin, précisons le terme « perturber ». Nous travaillerons dans l'espace des difféomorphismes ou dans l'espace des champs de vecteurs d'une classe  $C^r$  donnée avec  $r = 1, 2, \dots$ , ou  $\infty$ , chacun de ces espaces sera muni de la topologie  $C^r$  de Whitney, et c'est en ce sens que l'on entendra le mot « perturber ». On pourra aussi restreindre la classe de difféomorphismes/champs de vecteurs considérée.

En régularité  $C^0$ , le lemme de fermeture ne pose pas de difficulté particulière. Étant donné un point récurrent  $x_0$  (mais non périodique) d'un homéomorphisme  $\phi$  et un réel  $\varepsilon > 0$ , on fixe un entier  $k > 0$  tel que  $\phi^k(x_0)$  soit à distance plus petite que  $\varepsilon/2$  de  $x_0$ . On choisit un homéomorphisme  $\psi$  à support dans un  $\varepsilon/2$ -voisinage de  $x_0$ , envoyant  $\phi^k(x_0)$  sur  $x_0$ , et dont le support évite le début de l'orbite  $\phi(x_0), \phi^2(x_0), \dots, \phi^{k-1}(x_0)$  (à partir de la dimension 2, c'est possible). Alors  $\psi \circ \phi$  est une perturbation  $\varepsilon$ -petite en topologie  $C^0$  de  $\phi$  (comme  $\psi$  est supporté dans le  $\varepsilon/2$ -voisinage d'un point, il est à distance uniforme  $\varepsilon$  de l'identité), et  $x_0$  est un point  $k$ -périodique de  $\psi \circ \phi$ . Un argument similaire donne un lemme de fermeture  $C^0$  pour les champs de vecteurs.



Dans l'argument ci-dessus, il n'y a aucune raison pour que  $\psi$  soit petit en topologie  $C^1$ . Au contraire même, par accroissements finis, un difféomorphisme supporté dans une boule de rayon  $\delta$  et ayant une distance  $C^1$  à l'identité majorée par  $A$ , ne peut déplacer les points que d'au plus  $\delta A$ . La taille du support tend à s'agrandir si l'on cherche à réduire la taille de la perturbation. Ce support risque donc de rencontrer le début de l'orbite  $\phi(x_0), \phi^2(x_0), \dots, \phi^{k-1}(x_0)$  et l'on perd le contrôle de la dynamique de  $\psi \circ \phi$ . En régularité  $C^r$  supérieure la situation empire : si la distance  $C^r$  à l'identité d'un difféomorphisme supporté dans une boule de rayon  $\delta$  est majorée par  $A$  alors les points ne peuvent être déplacés que d'au plus  $A\delta^r$ . La conclusion de ce paragraphe est que la démonstration naïve du lemme de fermeture ne fonctionne pas en régularité supérieure.

Ces difficultés ont été surmontées par Pugh en 1967 dans le cas de la topologie  $C^1$  (PUGH, 1967a,b). Énonçons le résultat pour les difféomorphismes.

**Théorème 1.1** (« closing lemma »  $C^1$ , PUGH, 1967b). — *Pour tout  $C^1$ -difféomorphisme  $\phi$  d'une variété compacte  $M$ , tout point récurrent  $p \in M$  de  $\phi$  et tout  $C^1$ -voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\phi$ , il existe un difféomorphisme  $\psi \in \mathcal{U}$  dont  $p$  est un point périodique.*

Suite à ce travail fondateur de Pugh, le lemme de fermeture et sa démonstration ont connu de nombreuses améliorations, extensions et simplifications. Mentionnons brièvement quelques exemples remarquables. PUGH et ROBINSON (1983) ont montré que le lemme de fermeture  $C^1$  reste vrai (avec une preuve analogue) lorsque l'on se restreint aux difféomorphismes conservatifs (c'est-à-dire préservant le volume) d'une variété munie d'une forme volume, aux difféomorphismes symplectiques ou

encore aux difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique. MAÑÉ (1982) a démontré un « closing lemma ergodique » : *tout difféomorphisme d'une variété compacte ayant une mesure de probabilité ergodique  $\mu$  peut être  $C^1$ -approché par des difféomorphismes  $f_n$  ayant une orbite périodique  $\Omega_n$  telle que la mesure équirépartie sur  $\Omega_n$  converge faiblement vers  $\mu$* . HAYASHI (1997) a démontré un « connecting lemma » ; on ne cherche plus ici à fermer une orbite mais à connecter deux points distincts par une orbite. En améliorant le résultat de Hayashi, BONATTI et CROVISIER (2004) ont montré que le lemme de fermeture reste vrai en remplaçant l'hypothèse de « récurrence » sur le point  $x_0$  par une hypothèse beaucoup plus faible de « récurrence par chaîne ». Une version de ce résultat pour les difféomorphismes symplectiques est due à ARNAUD, BONATTI et CROVISIER (2005). Après 50 ans de recul et de multiples simplifications, la démonstration du lemme de fermeture  $C^1$  de Pugh est maintenant bien comprise par les experts mais reste considérée comme difficile et technique. Pour plus de détails sur l'historique du « closing lemma », le lecteur peut consulter par exemple ANOSOV et ZHUZHOMA (2012), ARNAUD (1998), CROVISIER (2013) et PUGH (2011).

Le paragraphe qui précède ne concerne que les perturbations de classe  $C^1$ . La situation est radicalement différente en régularité supérieure, où le problème est très largement ouvert, à quelques résultats isolés près qui ne s'appliquent qu'à des classes très spécifiques de transformations en petite dimension (voir par exemple CROVISIER et PUJALS (2018) et YOUNG (1979)). On ne sait toujours pas s'il existe un lemme de fermeture  $C^2$  pour les champs de vecteurs des surfaces. Des résultats négatifs ont même été obtenus par GUTIERREZ (1987), puis par HERMAN (1991) dans le cas hamiltonien. Nous reviendrons sur ce dernier résultat. C'est dans ce contexte que Irie puis Asaoka-Irie ont démontré des lemmes de fermeture  $C^\infty$  s'appliquant à de larges classes de systèmes dynamiques en dimension 2 et 3.

### 1.2. Lemmes de fermeture $C^\infty$ pour les difféomorphismes hamiltoniens en dimension 2 et les champs de Reeb en dimension 3

Les difféomorphismes hamiltoniens sont des transformations initialement issues de la mécanique classique, mais le formalisme de la géométrie différentielle permet de les définir sur toute variété symplectique. Nous nous intéressons à un cas particulier de variété symplectique, une surface  $(\Sigma, \omega)$  munie d'une forme d'aire. Un difféomorphisme hamiltonien sur  $(\Sigma, \omega)$  est alors un difféomorphisme de  $\Sigma$  qui préserve la forme  $\omega$ , est isotope à l'identité et admet un vecteur de rotation nul. Nous détaillerons tout ceci dans la partie 2.1. Il s'agit d'une famille très importante de difféomorphismes, dont la dynamique et en particulier les orbites périodiques ont été très étudiées. La conjecture d'Arnold (ARNOLD, 1976), démontrée dans le cas des surfaces par ELIASHBERG (1979), affirme qu'un difféomorphisme hamiltonien d'une surface compacte admet au moins deux points fixes s'il s'agit de la sphère et trois points fixes s'il s'agit d'une surface de genre plus grand. FRANKS (1996) a prouvé qu'un difféomorphisme hamiltonien de la sphère ayant au moins trois points fixes admet une infinité d'orbites périodiques. En genre non nul, c'est la conjecture de Conley (cf. SALAMON et ZEHNDER, 1992) qui

s'applique : un difféomorphisme hamiltonien admet une infinité de points périodiques (cf. FRANKS et HANDEL, 2003 ; LE CALVEZ, 2006).

Le théorème d'Asaoka et Irie qui nous intéresse ici est un lemme de fermeture pour les difféomorphismes hamiltoniens des surfaces compactes. On notera  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de  $(\Sigma, \omega)$ . Muni de la topologie  $C^\infty$ , cet ensemble admet la structure d'un groupe de Lie de dimension infinie (Fréchet), dont l'algèbre de Lie est l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  de moyenne nulle.

**Théorème 1.2** (ASAOKA et IRIE, 2016). — Soient  $(\Sigma, \omega)$  une surface compacte munie d'une forme d'aire,  $\phi$  un difféomorphisme hamiltonien de  $(\Sigma, \omega)$  et  $U$  un ouvert de  $\Sigma$ . Alors il existe une suite de difféomorphismes hamiltoniens  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\phi$  en topologie  $C^\infty$  et telle que  $\phi_i$  admet un point périodique dans  $U$  pour tout entier  $i$ .

Ce résultat implique facilement le lemme de fermeture tel que formulé dans la partie précédente.

**Corollaire 1.3.** — Soient  $(\Sigma, \omega)$  une surface compacte munie d'une forme d'aire,  $\phi$  un difféomorphisme hamiltonien de  $(\Sigma, \omega)$  et  $p$  un point de  $\Sigma$ . Alors, pour tout  $C^\infty$ -voisinage  $\mathcal{U}$  de  $\phi$  dans  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$ , il existe un difféomorphisme hamiltonien  $\psi \in \mathcal{U}$  qui admet  $p$  pour point périodique.

Notons que l'hypothèse que  $p$  est récurrent n'apparaît pas dans cet énoncé. Ceci s'explique par le théorème de récurrence de Poincaré, qui affirme que presque tout point est récurrent pour un difféomorphisme préservant l'aire. Asaoka et Irie en déduisent un autre résultat, inspiré par le « théorème de densité générique » de PUGH (1967a). Nous dirons qu'une propriété est *générique* sur un certain espace métrique complet si l'ensemble des éléments de cet espace qui la satisfont contient une intersection dénombrable d'ouverts denses<sup>1</sup>.

**Corollaire 1.4** (ASAOKA et IRIE, 2016). — Pour toute surface  $(\Sigma, \omega)$  compacte munie d'une forme d'aire, la propriété d'avoir un ensemble dense de points périodiques est générique pour la topologie  $C^\infty$  dans l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de  $(\Sigma, \omega)$ .

La version  $C^1$  du corollaire 1.4 était connue et due à PUGH et ROBINSON (1983).

Pour déduire le corollaire du théorème 1.2, on procède comme suit. Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base dénombrable de la topologie de  $\Sigma$ . L'ensemble  $\mathcal{H}(U_i)$  des difféomorphismes hamiltoniens qui admettent un point périodique *non dégénéré*<sup>2</sup> dans  $U_i$  est un ouvert. Un point périodique peut toujours être rendu non dégénéré par une perturbation  $C^\infty$ -petite. Le théorème 1.2 implique donc que  $\mathcal{H}(U_i)$  est dense pour chaque  $i$ . Les éléments de  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(U_i)$  ont des points périodiques dans chaque  $U_i$ , leur ensemble de points périodiques est donc dense, ce qui termine la démonstration du corollaire.

<sup>1</sup> Le théorème de Baire affirme bien sûr qu'un tel ensemble est dense.

<sup>2</sup> Un point  $T$ -périodique  $p$  d'un difféomorphisme hamiltonien  $\phi$  est dit *non dégénéré* si la différentielle de  $\phi^T$  au point  $p$  n'admet pas 1 pour valeur propre. Sur une surface, il est alors soit *hyperbolique* (valeurs propres réelles distinctes inverses l'une de l'autre), soit *elliptique* (valeurs propres conjuguées et de module 1).

La démonstration d’Asaoka et Irie ne se fonde ni sur la théorie de Floer, ni sur la théorie de Franks-Handel, ni sur la théorie de Le Calvez, donc sur aucune des théories ayant obtenu les résultats les plus significatifs pour l’étude des orbites périodiques des difféomorphismes hamiltoniens de surface. Leur démonstration consiste à se ramener à un autre lemme de fermeture, qui fut auparavant prouvé par Irie, et s’applique aux champs de vecteurs de Reeb des variétés de contact en dimension 3. Avant de l’énoncer, donnons rapidement les définitions nécessaires.

Les structures de contact peuvent être définies en toute dimension impaire, mais nous nous restreignons ici au cas de la dimension 3. Une *structure de contact* (co-orientable) sur une variété tridimensionnelle  $V$  est un champ de plans  $\xi$ , qui est le noyau d’une 1-forme de contact, c’est-à-dire d’une 1-forme  $\alpha$  telle que  $\alpha \wedge d\alpha$  ne s’annule pas. Par exemple, le bord d’un domaine étoilé de  $\mathbb{R}^4$  porte une structure de contact naturelle. Autre exemple important, le fibré en sphères cotangentes d’une variété riemannienne porte également une structure de contact naturelle. Nous introduirons en détail les structures de contact dans la partie 2.2.

Une structure de contact donnée  $\xi = \ker \alpha$  est le noyau d’une multitude de formes de contact. En fait, une 1-forme admet  $\xi$  pour noyau si et seulement si elle est de la forme  $f\alpha$  avec  $f \in C^\infty(V)$  ne s’annulant pas. Chaque forme de contact  $\alpha$  induit un *champ de vecteurs « de Reeb »*  $R_\alpha$  par

$$d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(R_\alpha) = 1.$$

Il y a donc aussi une multitude de champs de Reeb (autant qu’il y a de fonctions lisses ne s’annulant pas). Un exemple fondamental de flot engendré par un champ de Reeb est le flot géodésique sur un fibré en sphères cotangentes (voir la partie 2.2 pour plus de détails). On peut donc penser aux flots de Reeb comme à une large généralisation des flots géodésiques.

Comme les orbites périodiques des difféomorphismes hamiltoniens, les orbites périodiques des champs de Reeb ont été énormément étudiées. La conjecture de WEINSTEIN (1979) prédit que le flot d’un champ de Reeb d’une variété de contact compacte admet toujours au moins une orbite périodique. Après de nombreux travaux précurseurs, notamment de Hofer et Viterbo, la conjecture a été établie par TAUBES (2007) pour toutes les variétés de contact de dimension 3 (voir aussi AUROUX, 2010). En dimension plus grande, la conjecture demeure ouverte en général, bien que de multiples cas aient été établis. Mentionnons aussi quelques résultats de multiplicité en dimension 3 : CRISTOFARO-GARDINER et HUTCHINGS (2016) et CRISTOFARO-GARDINER, HUTCHINGS et POMERLEANO (2019). Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de fermeture d’Irie.

**Théorème 1.5** (IRIE, 2015). — Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact compacte tridimensionnelle,  $R$  un champ de Reeb et  $U$  un ouvert de  $V$ . Alors,  $R$  est limite en topologie  $C^\infty$  de champs de Reeb qui coïncident avec  $R$  dans le complémentaire de  $U$  et admettent une orbite périodique rencontrant  $U$ .