

**ESTIMATIONS DE RÉSOVANTE ET LOCALISATION DU SPECTRE POUR  
CERTAINES CLASSES D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS  
SEMI-CLASSIQUES NON AUTOADJOINTS**  
[d'après Nils Dencker, Johannes Sjöstrand et Maciej Zworski]

par **Karel Pravda-Starov**

L'objet de ce texte est de donner une présentation de l'article de DENCKER, SJÖSTRAND et ZWORSKI (2004) sur l'étude du pseudospectre des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques non autoadjoints. L'étude des propriétés pseudospectrales d'un opérateur revient à étudier les lignes de niveau de la norme de sa résolvante. Pour des opérateurs non autoadjoints, il s'agit d'un problème non trivial, et ce même lorsque le spectre de ces opérateurs est connu. En effet, il n'y a aucun contrôle a priori de la résolvante d'un opérateur non autoadjoint par son spectre, et la résolvante d'un tel opérateur peut exploser en norme dans des régions non bornées de l'ensemble résolvant très éloignées du spectre. Les travaux de Dencker, Sjöstrand et Zworski que nous présentons ici montrent comment l'analyse microlocale et notamment des résultats de non-résolubilité ou de sous-ellipticité permettent d'expliquer ces phénomènes de contrôle ou d'explosion de la résolvante pour des classes générales d'opérateurs non autoadjoints. Ces résultats généraux obtenus au milieu des années 2000 ont permis de jeter un jour nouveau et de comprendre un certain nombre de phénomènes qui intriguaient certains analystes numériques et spécialistes de théorie spectrale depuis la fin des années 90.

**1. CONTEXTE ET ÉTAT DE L'ART AVANT LES TRAVAUX DE DENCKER,  
SJÖSTRAND ET ZWORSKI**

**1.1. Pseudospectre et instabilités spectrales**

La notion de pseudospectre a été d'abord introduite et étudiée par des analystes numériques comme TREFETHEN (1997, 1999) qui ont noté de sensibles différences entre d'un côté les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale, et d'un autre côté les résultats obtenus par simulation numérique pour certains problèmes d'ingénierie mathématique où interviennent naturellement des opérateurs non autoadjoints. Ce constat originel laisse penser que dans certains cas, la connaissance seule du spectre d'un opérateur ne permet pas de comprendre suffisamment son action. C'est ainsi que, pour suppléer à cet apparent manque d'information contenu dans le spectre, de nouveaux sous-ensembles du plan complexe appelés pseudospectres

ont été introduits. L'idée sous-jacente à la définition de ces nouveaux objets est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante d'un opérateur n'est pas définie, i.e. son spectre, mais également les régions de l'ensemble résolvant où elle est en norme de taille significative.

Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe et  $P : \mathcal{D}(P) \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur fermé à domaine dense. L'ensemble résolvant

$$\rho(P) = \{z \in \mathbb{C} ; P - z ; \mathcal{D}(P) \rightarrow \mathcal{H} \text{ admet un inverse borné}\},$$

est un ensemble ouvert. Le spectre de  $P$  est le complémentaire de l'ensemble résolvant :

$$\sigma(P) = \mathbb{C} \setminus \rho(P).$$

Si  $z \in \rho(P)$ , la norme de la résolvante  $\delta = \|(P - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} > 0$  donne une première localisation du spectre de l'opérateur puisque le disque ouvert  $D(z, 1/\delta)$  est alors nécessairement inclus dans l'ensemble résolvant. Si  $\varepsilon > 0$ , le  $\varepsilon$ -pseudospectre défini par TREFETHEN (1997, 1999) est donné par

$$(1) \quad \sigma_\varepsilon(P) = \sigma(P) \cup \{z \in \rho(P) ; \|(P - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} > \varepsilon^{-1}\}.$$

Contrairement au spectre, les ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux ne sont pas invariants par changement de norme sur  $\mathcal{H}$ . Ces sous-ensembles contiennent tous le spectre de l'opérateur et leur étude, qui se réduit à l'étude des lignes de niveau de la norme de la résolvante

$$z \in \rho(P) \mapsto \|(P - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

permet d'apprécier la stabilité du spectre de l'opérateur  $P$  par rapport à de petites perturbations. En effet, ROCH et SILBERMANN (1996) ont montré qu'un nombre complexe appartient au  $\varepsilon$ -pseudospectre d'un opérateur  $P$  si et seulement si ce point appartient au spectre d'une perturbation  $P + Q$  de taille  $\|Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \varepsilon$ ,

$$\sigma_\varepsilon(P) = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \|Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \varepsilon}} \sigma(P + Q).$$

On comprend avec ce second point de vue l'intérêt d'étudier de tels sous-ensembles lorsque l'on cherche par exemple à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. En effet, la discrétisation de l'opérateur et les inévitables erreurs d'arrondis qui se produisent lors des calculs numériques vont générer des perturbations de l'opérateur initial, ce qui induit en fin de compte que les algorithmes pour le calcul des valeurs propres vont déterminer des valeurs propres d'une perturbation de l'opérateur initial, i.e. une valeur d'un  $\varepsilon$ -pseudospectre, mais pas nécessairement une valeur spectrale. Il est donc important, lorsque l'on cherche à déterminer numériquement le spectre d'un opérateur, de comprendre dans quelle mesure ces ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux contiennent plus ou moins largement le spectre de l'opérateur pour de petites valeurs du paramètre  $\varepsilon > 0$ .

L'étude du pseudospectre est triviale pour les opérateurs autoadjoints ou plus généralement pour les opérateurs normaux. En effet, le théorème spectral assure que

les ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux de ces opérateurs sont simplement les  $\varepsilon$ -voisinages de leurs spectres

$$(2) \quad \sigma_\varepsilon(P) = \{z \in \mathbb{C} ; d(z, \sigma(P)) < \varepsilon\}.$$

Les ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux épousent donc très finement le spectre de l'opérateur lorsque  $\varepsilon$  est très petit. Cette description assure alors la stabilité spectrale des opérateurs autoadjoints sous de petites perturbations. Dans le cas non autoadjoint et plus précisément dans le cas non-normal, seule l'inclusion suivante est satisfaite

$$(3) \quad \{z \in \mathbb{C} ; d(z, \sigma(P)) < \varepsilon\} \subset \sigma_\varepsilon(P).$$

La norme de la résolvante peut alors prendre de très grandes valeurs dans des régions de l'ensemble résolvant lointaines du spectre de l'opérateur. Ceci explique la possible très forte sensibilité du spectre des opérateurs non-normaux sous l'effet de petites perturbations et constitue une difficulté importante pour l'étude des problèmes d'évolution associés à ces opérateurs non-normaux.

### 1.2. L'oscillateur harmonique non autoadjoint

Un exemple particulièrement marquant pour illustrer ces phénomènes de possibles instabilités spectrales sous l'effet de petites perturbations est donné par l'oscillateur harmonique non autoadjoint, aussi appelé opérateur de DAVIES,

$$(4) \quad H_\theta = D_x^2 + e^{i\theta} x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad D_x = i^{-1} \partial_x, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

muni du domaine

$$\mathcal{D}(H_\theta) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) ; \forall k, \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq k + \ell \leq 2, x^k \partial_x^\ell u \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Mis en avant par DAVIES (1999a), cet opérateur d'expression très simple a particulièrement intrigué certains spécialistes de théorie spectrale au tournant du nouveau millénaire. Pour  $\theta = 0$ , l'opérateur est autoadjoint et se réduit simplement à l'oscillateur harmonique, tandis que pour  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , il est non autoadjoint. Dans les deux cas, le spectre est composé uniquement de valeurs propres simples régulièrement distribuées le long de la demi-droite  $e^{i\frac{\theta}{2}} \mathbb{R}_+$ ,

$$(5) \quad \sigma(H_\theta) = \{e^{i\frac{\theta}{2}}(2n + 1) ; n \in \mathbb{N}\}.$$

Le cas autoadjoint  $\theta = 0$  correspond à un cas de stabilité spectrale puisque les ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux sont simplement donnés par un  $\varepsilon$ -voisinage des valeurs propres (5). A contrario, DAVIES (1999a, Théorème 5) a montré que le cas  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  laissait apparaître de très fortes instabilités spectrales sous l'effet de petites perturbations puisque la résolvante de l'opérateur  $H_\theta$  explose en norme

$$(6) \quad \forall 0 < \alpha < \theta, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \|(H_\theta - r e^{i\alpha})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = +\infty,$$

le long de toute demi-droite de sommet zéro incluse dans le secteur angulaire

$$\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg z < \theta\} \cup \{0\},$$

dans des régions possiblement très éloignées de la demi-droite  $e^{i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}_+$  qui contient le spectre ; alors que la résolvante reste bornée et tend même vers zéro en norme en dehors du secteur angulaire fermé  $\overline{\Sigma}_\theta$ ,

$$(7) \quad \forall \theta < \alpha < 2\pi, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \|(H_\theta - r e^{i\alpha})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 0.$$

On peut s'essayer comme dans PRAVDA-STAROV (2008c) à retrouver numériquement cette très forte sensibilité spectrale de l'oscillateur harmonique non autoadjoint en effectuant une simulation numérique sur la discrétisation matricielle  $(\langle H_{\pi/4}\Psi_i, \Psi_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq i, j \leq N}$ , avec  $N = 100$ , où  $(\Psi_j)_{j \geq 1}$  désigne la base hilbertienne formée par les fonctions de Hermite.

Le résultat de cette simulation numérique est donné par la figure suivante où les valeurs propres calculées numériquement sont représentées par des points noirs alors que les courbes correspondent à des lignes de niveau de la norme de la résolvante en échelle logarithmique.

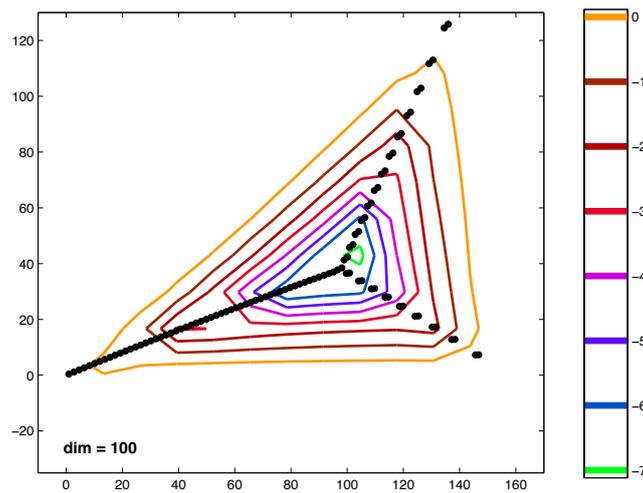


FIGURE 1. Calcul numérique de quelques lignes de niveau de la norme de la résolvante  $\|(H_{\pi/4} - z)^{-1}\| = \varepsilon^{-1}$  de l'oscillateur harmonique non autoadjoint  $H_{\pi/4}$ . La colonne de droite indique les valeurs correspondantes de  $\log_{10} \varepsilon$ .

On constate sur cette figure que les valeurs numériques obtenues pour les basses énergies, i.e. les petites valeurs propres, sont très proches des valeurs théoriques. Comme attendu, elles se répartissent régulièrement le long de la demi-droite  $e^{i\frac{\pi}{8}}\mathbb{R}_+$ . Cependant, cette bonne adéquation entre les valeurs propres théoriques et les valeurs propres calculées numériquement n'est plus du tout vérifiée pour les hautes énergies. Au delà d'un certain seuil, les valeurs propres numériques s'éloignent très fortement de la demi-droite  $e^{i\frac{\pi}{8}}\mathbb{R}_+$ . Il se produit alors des phénomènes de très fortes instabilités

spectrales qui conduisent au calcul de valeurs propres aberrantes pour les hautes énergies de cet opérateur.

Ces résultats d'explosion (6) ou de contrôle (7) de la résolvante laissent augurer l'existence d'une géométrie sous-jacente distinguant différentes régions de l'ensemble résolvant dans lesquelles de très fortes instabilités spectrales peuvent, ou non, se développer sous l'effet de petites perturbations. La géométrie des ensembles pseudospectraux de l'oscillateur harmonique non autoadjoint a été ensuite étudiée plus avant par BOULTON (2002, Théorème 3.3) qui montre que la résolvante de l'oscillateur harmonique non autoadjoint explose en norme

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|(H_\theta - (bt + e^{i\theta}t^p))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = +\infty,$$

le long de toutes les courbes du type  $t \mapsto bt + e^{i\theta}t^p$ , où  $b > 0$  et  $1/3 < p < 3$ ; alors qu'elle reste bornée sur deux demi-bandes parallèles aux demi-droites  $\mathbb{R}_+$  et  $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ ,

$$(9) \quad \exists d > 0, \quad \sup_{\substack{t > 0, \\ 0 \leq b \leq d}} \|(H_\theta - (t + ib))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} + \sup_{\substack{t > 0, \\ 0 \leq b \leq d}} \|(H_\theta - e^{i\theta}(t - ib))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} < +\infty.$$

Ces bornes permettent de donner la localisation suivante des ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux

$$(10) \quad \forall 0 < \delta < 1, \forall m \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$$\sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m D(e^{i\frac{\theta}{2}}(2n+1), \delta) \cup [e^{i\frac{\theta}{2}}(2m+3-\delta) + \bar{\Sigma}_\theta],$$

où  $D(z, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$ . Les sous-ensembles  $(\sigma_\varepsilon(H_\theta))_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$  sont donc contenus dans l'ensemble grisé apparaissant sur la figure 2, où les valeurs propres sont indiquées par les symboles  $\diamond$ .

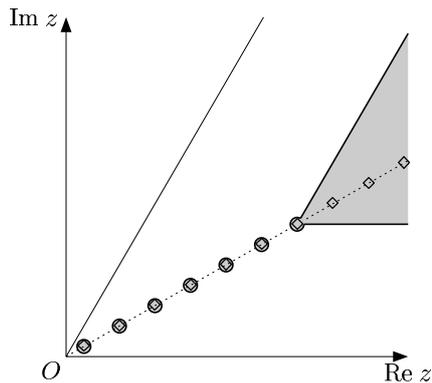


FIGURE 2. Localisation des ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux de l'oscillateur harmonique non autoadjoint  $H_\theta$ .

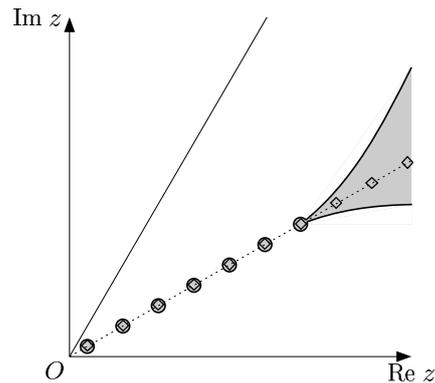


FIGURE 3. Forme des ensembles  $\varepsilon$ -pseudospectraux de l'oscillateur harmonique non autoadjoint.