

THÉORIE DE FORÇAGE
DES HOMÉOMORPHISMES DE SURFACES
[d'après Le Calvez et Tal]

par Pierre-Antoine Guihéneuf

INTRODUCTION

Cet exposé de dynamique commence de manière terriblement banale par une idée géniale de Poincaré. Quelques mois avant sa mort, s'excusant de n'avoir « jamais présenté au public un travail aussi inachevé », celui-ci se résout à publier des résultats partiels car, vu son âge, il n'est pas sûr de pouvoir les reprendre un jour. Son article est en grande partie motivé par l'étude des orbites périodiques du problème à trois corps dans le cas où, contrairement à ses travaux antérieurs, les masses ne sont pas petites. Utilisant une intégrale première et ce qui est désormais appelé une section de Poincaré, il ramène l'existence d'orbites périodiques à ce que certains nomment « le dernier théorème de géométrie de Poincaré ».

Théorème 0.1 (Poincaré-Birkhoff). — *Soit un homéomorphisme de l'anneau fermé préservant l'aire, et tel que les nombres de rotation de ses restrictions aux deux cercles du bord sont de signes opposés¹. Alors cet homéomorphisme possède au moins deux points fixes.*

Poincaré explique qu'il sait tout de même résoudre un grand nombre de cas particuliers. BIRKHOFF, 1913 démontrera rigoureusement ce théorème (pour l'existence d'un point fixe seulement) quelques mois après le décès de Poincaré (voir aussi MASSOT et ARNAUD, 2012) dans un tour de force qui devient l'un des tout premiers résultats difficiles en dynamique topologique.

Ce théorème aura une influence considérable à la fois pour la fondation de la topologie symplectique, avec la conjecture d'Arnold, et de la dynamique topologique sur les surfaces, dont il sera question dans cet exposé.

Une seconde motivation de la dynamique sur les surfaces est plus pragmatique : il s'agit de faire un compromis entre la réalité physique de systèmes ayant des espaces de configuration de très grande dimension et la puissance des outils mathématiques à notre disposition.

Le but de cet exposé est de présenter les idées d'une théorie du forçage pour les homéomorphismes de surfaces, fondée dans LE CALVEZ et TAL, 2018a et LE CALVEZ et TAL, 2018b, et qui est en quelque sorte l'aboutissement de toute une série de travaux

¹ Ce qui sous-entend que ceux-ci sont préservés et que l'homéomorphisme préserve l'orientation.

visant à améliorer la théorie de Brouwer. Si celle-ci prend sa source dans le 5^e problème de Hilbert, elle s'est rapidement imposée comme un outil incontournable pour la dynamique topologique sur les surfaces — il s'est par ailleurs avéré que le théorème 3.2 de translation de Brouwer donne une preuve du théorème de Poincaré-Birkhoff (voir GUILLOU, 1994).

L'idée de la théorie du forçage est d'exploiter le théorème 3.4 de LE CALVEZ, 2005 qui associe à tout homéomorphisme de surface homotope à l'identité un feuilletage singulier sur la surface. On utilise alors une sorte de dualité entre l'action de l'homéomorphisme f sur les points de la surface et sur les feuilles du feuilletage : comme résumé par le diagramme suivant, on part d'une propriété sur f , la traduit en termes de feuilletages, on en déduit l'existence de nouvelles orbites de l'action de f sur le feuilletage, ce qui implique une certaine propriété de l'action de f sur les points.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}' \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 S & \xrightarrow{f} & S
 \end{array}$$

Le parti pris de cet exposé n'est pas de lister toutes les (innombrables) applications de cette théorie, mais plutôt d'aller calmement vers l'énoncé et la preuve de la proposition fondamentale 4.3 de forçage, avant d'en déduire quelques unes des conséquences les plus directes concernant les ensembles de rotation. Avant cela, j'énoncerai deux des corollaires de cette théorie qui me semblent parmi les plus emblématiques et ferai un détour didactique par un énoncé de forçage en dimension 1, qui motivera la définition de fer à cheval topologique.

1. QUELQUES APPLICATIONS AUX HOMÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

Les applications de la théorie du forçage sur les surfaces impressionnent par leur nombre et leur puissance : outre les théorèmes numérotés de A à M dans LE CALVEZ et TAL, 2018a et de A à L dans LE CALVEZ et TAL, 2018b, on peut citer les travaux CONEJEROS et TAL, 2016, CONEJEROS et TAL, 2019 et LELLOUCH, 2019 se basant de manière cruciale sur cette théorie. Elles concernent à la fois la théorie de la rotation sur l'anneau, le tore et les surfaces de genre supérieur, mais aussi les homéomorphismes non errants de la sphère, les difféomorphismes hamiltoniens du tore, etc.

Plutôt que de faire la liste de toutes ces applications, je voudrais en présenter deux qui me semblent parmi les plus frappantes ; nous rentrerons plus dans le détail des applications aux homéomorphismes du tore dans la dernière partie de cet exposé. Étant donnée une surface S , on notera $\text{Homeo}_0(S)$ l'ensemble des homéomorphismes de S isotopes à l'identité.

La première est un théorème de structure des ensembles non errants d'homéomorphismes de la sphère d'entropie nulle. Rappelons que l'ensemble non errant d'un homéomorphisme f d'un espace compact M est défini par

$$\Omega(f) = \{x \in M ; \forall U \text{ voisinage de } x, \exists n > 0 : f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Dans cet ensemble on peut sélectionner les points ayant un comportement asymptotique « non trivial » : on pose²

$$\Omega'(f) = \{z \in \Omega(f) ; \alpha(z) \cup \omega(z) \not\subset \text{Fix}(f)\}.$$

Notons que l'ensemble des points récurrents non fixes de f est un G_δ dense de $\Omega'(f)$.

FRANKS et HANDEL, 2012 ont démontré un théorème de structure pour les difféomorphismes de la sphère préservant le volume, d'entropie nulle et de classe C^∞ . Leur preuve est essentiellement topologique mais utilise (entres autres) la théorie de Yomdin sur le taux de croissance de la longueur des arcs, qui requiert la régularité C^∞ . Ce théorème a été étendu successivement dans LE CALVEZ et TAL, 2018a aux homéomorphismes non errants (théorème M), et dans LE CALVEZ et TAL, 2018b (théorème G) à l'ensemble non errant d'un homéomorphisme.

Théorème 1.1. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{S}^2)$ un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation et sans fer à cheval topologique³. Alors l'ensemble $\Omega'(f)$ est recouvert par une famille $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'anneaux ouverts tels que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

- 1) $f|_{A_\alpha}$ est sans point fixe et isotope à id_{A_α} ;
- 2) il existe un relevé de $f|_{A_\alpha}$ au revêtement universel de A_α dont l'ensemble de rotation est inclus dans $[0, 1]$;
- 3) A_α est minimal pour les deux premières propriétés.

De plus, si l'homéomorphisme f est non errant (i.e. $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$), alors les anneaux A_α sont deux-à-deux disjoints et leur union est dense dans $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$.

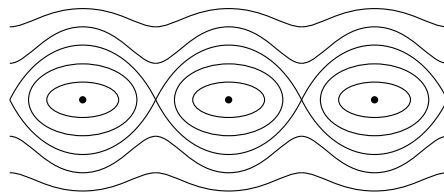


FIGURE 1. Portrait de phase du type pendule simple.

² Pour tout point $x \in S$, on définit son ω -limite (resp. α -limite) comme l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite positive (resp. négative) de x sous f .

³ Cette notion sera définie au paragraphe suivant. Le lecteur connaissant le fer à cheval de Smale peut avoir cet exemple en tête ; mentionnons le fait qu'un homéomorphisme d'entropie nulle est sans fer à cheval topologique.

Remarquons tout de suite que cet énoncé a des liens très intimes avec le théorème 0.1 de Poincaré-Birkhoff, à travers la condition 2 qui exprime que les anneaux, sans points fixes, ne peuvent pas vérifier les conditions du théorème de Poincaré-Birkhoff.

Le théorème 1.1 exprime que la dynamique d'un homéomorphisme de la sphère d'entropie nulle « ressemble »⁴ à celle du portrait de phase du pendule simple (figure 1). Notons qu'il est possible que l'ensemble \mathcal{A} soit vide (et donc qu'il n'y ait aucun anneau), par exemple pour une dynamique du type nord-sud.

Le résultat est plus faible dans le cas général d'un ensemble errant non vide (on ne sait pas si les anneaux sont disjoints) : de l'aveu même des auteurs il reste encore du travail pour obtenir une description complète des homéomorphismes de la sphère d'entropie nulle. Néanmoins, la preuve de ce dernier théorème est longue et délicate dans le cas général (elle occupe une part importante de LE CALVEZ et TAL, 2018b) : nous ne l'aborderons pas ici.

La seconde application concerne les ensembles transitifs. On dit que $\Lambda \subset \mathbb{S}^2$ est *transitif* pour f s'il existe une orbite de $f|_{\Lambda}$ dense dans Λ . C'est une propriété plus forte que le fait d'être non errant, ce qui permet d'avoir une description plus précise dans le cas des homéomorphismes d'entropie nulle. Commençons par deux définitions.

Définition 1.2. Nous dirons que $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ est *topologiquement infiniment renormalisable* pour un ensemble fermé invariant non vide Λ s'il existe une suite croissante d'entiers $(q_n)_{n \geq 1}$ et une suite décroissante $(D_n)_{n \geq 1}$ de disques topologiques ouverts tels que :

- 1) q_n divise q_{n+1} ;
- 2) $f^{q_n}(D_n) = D_n$;
- 3) les disques $f^i(D_n)$, pour $0 \leq i < q_n$, sont deux-à-deux disjoints ;
- 4) $\Lambda \subset \bigcup_{0 \leq i < q_n} f^i(D_n)$.

Notons que si f est topologiquement infiniment renormalisable pour Λ , alors $f|_{\Lambda}$ est semi-conjugée à un odomètre (voir les figures 2 et 3).

Définition 1.3. Nous dirons qu'un ensemble fermé invariant non vide Λ est *de type irrationnel* s'il est l'union disjointe d'un nombre fini d'ensembles fermés $\Lambda_1, \dots, \Lambda_q$ qui sont permutés cycliquement par f , et s'il existe un nombre irrationnel $\rho \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 1$, si $z_0 \neq z_1$ sont deux points fixes de f^{q^n} , alors il existe un relevé \check{g} de $f^{q^n}|_{\mathbb{S}^2 \setminus \{z_0, z_1\}}$ au revêtement universel de $\mathbb{S}^2 \setminus \{z_0, z_1\}$ tel que $\check{g}|_{\check{\Lambda}}$ possède un unique nombre de rotation, qui est égal soit à $n\rho$, soit à 0.

Bien sûr, l'exemple le plus simple d'ensemble de type irrationnel est un cercle où la dynamique est de nombre de rotation irrationnel, mais il est possible de construire d'autres exemples plus complexes, par exemple par la méthode d'Anosov-Katok qui donne des pseudo-rotations irrationnelles transitives sur la sphère.

⁴ Attention tout de même, la situation peut être bien plus complexe que sur la figure, en particulier il n'y a pas de raison pour que l'homéomorphisme possède des courbes invariantes.

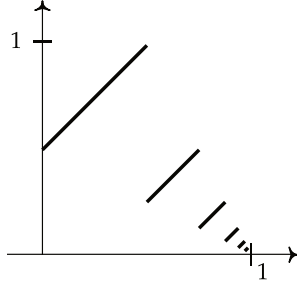


FIGURE 2. Une réalisation de l'odomètre par une application de l'intervalle.

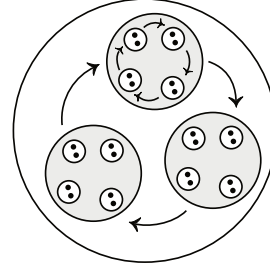


FIGURE 3. Un exemple d'application renormalisable.

Le résultat suivant est la proposition K de LE CALVEZ et TAL, 2018b.

Théorème 1.4. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{S}^2)$ un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation, sans fer à cheval topologique et Λ un ensemble invariant transitif et non vide. Alors :

- ▷ soit Λ est une orbite périodique ;
- ▷ soit f est topologiquement infiniment renormalisable pour Λ ;
- ▷ soit Λ est de type irrationnel.

2. UN CAS D'ÉCOLE : LA DIMENSION 1

Il me semble éclairant de commencer par revenir aux fondamentaux et expliquer un exemple de théorème de forçage d'orbites en dimension 1 : le théorème de SHARKOVSKY, 1964. Sa preuve, bien que très simple, sera éclairante pour la suite de notre exposition.

Théorème 2.1. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, qui possède un point périodique de période 3⁵. Alors f possède des points périodiques de n'importe quelle période entière.

Démonstration. — Soit a un point périodique de période 3 pour f . On note $b = f(a)$ et $c = f^2(a)$ (et donc $f(c) = a$). Quitte à permuter circulairement a, b et c et à changer f en $x \mapsto -f(-x)$, on peut supposer que $a < b < c$. Posant

$$I_0 =]a, b[\quad \text{et} \quad I_1 =]b, c[,$$

le théorème des valeurs intermédiaires assure que

$$f(I_0) \supset]b, c[= I_1 \quad \text{et} \quad f(I_1) \supset]a, c[\supset I_0 \cup I_1$$

(voir la figure 4). Autrement dit, définissant la relation \rightarrow_n sur les intervalles de $[a, c]$ par $I \rightarrow_n J$ si $f^n(I) \supset J$, on a $I_0 \rightarrow_1 I_1, I_1 \rightarrow_1 I_0$ et $I_1 \rightarrow_1 I_1$.

On peut représenter ces relations par le graphe suivant, où les flèches correspondent aux relations \rightarrow_1 :

⁵ C'est-à-dire un point $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^3(x) = x$ mais $f^k(x) \neq x$ pour tout $1 \leq k < 3$.