Séminaire BOURBAKI Janvier 2020
72e année, 2019-2021, no 1172, p. 183 à 214
doi : 10.24033/ast.1161

VOLUME D'ENSEMBLES NODAUX DE FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN [d'après Logunov, Malinnikova, ainsi que Yau, Brüning, Donnelly-Fefferman, Hardt-Simon, ...]

par **Maxime Ingremeau**

1. INTRODUCTION

Soient (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n et Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. On considèrera ici les fonctions propres de cet opérateur, c'est-à-dire les fonctions $\varphi_\lambda \in C^2(M; \mathbb{R})$ vérifiant

$$-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda. \tag{1}$$

Rappelons que, par régularité elliptique[1], les solutions de (1) sont automatiquement lisses, que les λ pour lesquels il existe une solution non triviale de (1) forment une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, et qu'il existe une base orthonormale de $L^2(M)$ formée de solutions de (1).

Si φ_λ est une solution de (1), on définit son *ensemble nodal* comme

$$\mathcal{N}(\varphi_\lambda) = \{x \in M\ ;\ \varphi_\lambda = 0\}.$$

L'objet de cet exposé est de présenter des résultats récents de Logunov (2018a,b) sur la façon dont le volume $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ dépend de λ. Avant de présenter ces résultats, rappelons comment ce volume est défini.

Définition du volume des ensembles nodaux. — On définit l'*ensemble singulier* de φ_λ comme

$$\mathcal{S}(\varphi_\lambda) := \{x \in M\ ;\ \varphi_\lambda = 0, \nabla\varphi_\lambda = 0\}.$$

Par le théorème des fonctions implicites, l'ensemble $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\backslash\mathcal{S}(\varphi_\lambda)$ est une sous-variété de M de dimension $n-1$. Cette sous-variété est alors naturellement munie d'une structure riemannienne, et on peut définir son volume

$$H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) := \mathrm{Vol}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\backslash\mathcal{S}(\varphi_\lambda)\big).$$

[1] Dans une carte locale, ces fonctions sont solutions d'une équation elliptique, que nous rappellerons au début de la section 3.

Le lemme suivant, dû à CAFFARELLI et FRIEDMAN (1985), nous affirme que $\mathcal{S}(\varphi_\lambda)$ est un objet de dimension au plus $n-2$:

Lemme 1.1. — *Si φ_λ est une solution de (1), alors il existe une famille dénombrable $(S_j)_{j\in J}$ de sous-variétés de M de dimension $n-2$ telles que*

$$\mathcal{S}(\varphi_\lambda) \subset \bigcup_{j\in J} S_j.$$

Ce lemme (que nous démontrerons dans la section 4.3) implique que $H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big)$ peut-être vue comme la *mesure de Hausdorff* $(n-1)$*-dimensionnelle* de $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$. Nous n'utiliserons pas cette notion ici, et renvoyons le lecteur à FEDERER (1969) pour plus de détails.

La conjecture de Yau. — Une question naturelle est celle de la dépendance de $H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big)$ par rapport à λ, en particulier quand $\lambda \to +\infty$. La conjecture suivante a été faite dans YAU (1982).

Conjecture 1.2. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe des constantes $c_1(M,g)$, $c_2(M,g) > 0$ telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant l'équation $-\Delta_g\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, on a*

$$c_1(M,g)\sqrt{\lambda} \leq H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) \leq c_2(M,g)\sqrt{\lambda}. \tag{2}$$

Remarquons que les constantes c_1 et c_2 dépendent nécessairement de la variété : la fonction $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ est une fonction propre de valeur propre λ sur $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ et sur $\mathbb{R}/(2k\pi\mathbb{Z})$, mais elle a k fois plus de zéros dans le deuxième cas.

La conjecture de Yau ne disant donc rien sur les constantes c_1 et c_2, l'inégalité (2) n'est intéressante que dans la limite où $\lambda \to +\infty$. Elle donne donc des informations sur les fonctions propres de grande valeur propre : on dit qu'il s'agit d'un résultat d'*analyse semi-classique*.

Résultats précédents concernant la conjecture de Yau. — La conjecture 1.2 a été démontrée dans DONNELLY et FEFFERMAN (1988) dans le cas où (M,g) est *analytique*.

Lorsque la variété n'est pas analytique, la conjecture est encore ouverte.

On dispose de résultats plus précis en dimension $n = 2$. La borne inférieure a été prouvée par Brüning, et redécouverte par Yau, tandis que la borne supérieure est due à DONNELLY et FEFFERMAN (1990), améliorant le résultat de NADIRASHVILI (1988). Une autre preuve de la borne supérieure a été donnée dans DONG (1992).

Théorème 1.3 (BRÜNING, 1978 ; DONNELLY et FEFFERMAN, 1990). — *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension 2 compacte sans bord. Il existe $c_1, c_2 > 0$ ne dépendant que de la variété (M,g) telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, on a*

$$c_1\sqrt{\lambda} \leq H^1\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) \leq c_2\lambda^{3/4}.$$

La preuve de la borne inférieure n'est pas très compliquée, et nous la rappellerons dans la section 2.2.

Lorsque la variété (M, g) est de dimension $n \geq 3$ et n'est pas analytique, les résultats connus avant les travaux récents de Logunov et Malinnikova étaient beaucoup moins précis.

Théorème 1.4 (Hardt et Simon, 1989). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g) telle que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) \leq c\lambda^{c\sqrt{\lambda}}.$$

Théorème 1.5 (Colding et Minicozzi, 2011). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g) telle que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) \geq c\lambda^{\frac{1}{4}(3-n)}. \tag{3}$$

Ce résultat a été prouvé par Colding et Minicozzi (2011), puis retrouvé par des méthodes très différentes par Hezari et Sogge (2012) en améliorant les techniques développées dans Sogge et Zelditch (2011) puis Hezari et Wang (2012), qui s'inspirent d'une formule d'intégration par parties découverte dans Dong, 1992. Enfin, cette borne a été retrouvée par Steinerberger (2014) par une méthode complètement différente, reposant sur l'équation de la chaleur.

Les résultats de Logunov et Malinnikova. — Récemment, la borne supérieure de Donnelly et Fefferman (1990) pour les surfaces a été légèrement améliorée par Logunov et Malinnikova (2018).

Théorème 1.6 (Logunov et Malinnikova, 2018). — *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 2 compacte sans bord. Il existe $c_2 > 0$ et $\beta \in \,]0, \frac{1}{4}[$ ne dépendant que de la variété (M, g) telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant l'équation $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$H^1\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) \leq c_2\lambda^{\frac{3}{4}-\beta}.$$

Enfin, la borne inférieure optimale a été prouvée[2] en toute dimension dans Logunov (2018b), et une borne supérieure polynomiale en λ a été obtenue dans Logunov (2018a), améliorant ainsi grandement les estimées de Hardt et Simon (1989) :

Théorème 1.7 (Logunov, 2018a,b). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, sans bord. Il existe $c_1, c_2 > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g), et $\alpha > 0$ ne dépendant que de n, telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$c_1\sqrt{\lambda} \leq H^{n-1}\big(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)\big) \leq c_2\lambda^\alpha.$$

[2] En dimension 3, une borne inférieure de la forme λ^α, pour un $\alpha > 0$ a aussi été obtenue dans Logunov et Malinnikova (2018). Cet article a été publié en même temps que Logunov (2018b), mais est beaucoup moins technique.

Notons que, dans ce théorème, la constante α (tout comme la constante β dans le théorème 1.6) n'est pas très explicite, comme on s'en rendra compte dans la section 6.

Concernant l'attribution du théorème 1.7, les remerciements des articles LOGUNOV (2018a,b) indiquent que « *This work was started in collaboration with Eugenia Malinnikova who suggested to apply the combinatorial approach to nodal sets of Laplace eigenfunctions. Her role in this work is no less than the author's one. Unfortunately, she refused to be a coauthor of this paper* ».

Nous recommandons la lecture de l'article de synthèse LOGUNOV et MALINNIKOVA (2019b), dans lequel toutes les grandes idées des articles LOGUNOV (2018a,b) et LOGUNOV et MALINNIKOVA (2018) sont présentées avec beaucoup de clarté.

Les ensembles nodaux à travers les âges. — Si nous n'avons présenté ci-dessus que des résultats récents concernant le volume de $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$, l'étude des ensembles nodaux des fonctions propres a une longue histoire.

En effet, les ensembles nodaux de fonctions propres (dans des domaines de $\mathbb{R}^2$) ont pu être observé expérimentalement par Chladni dès la fin du XVIII^e siècle.

Un analogue de (2) en dimension 1 peut être trouvé dans STURM (1836), où il est prouvé que, si ψ_n est la n-ième fonction propre[3] d'un opérateur différentiel du second ordre sur $[a, b]$, alors ψ_n s'annule exactement n fois dans $]a, b[$.

Enfin, l'un des premiers résultats mathématiques sur les fonctions propres est le théorème de Courant, prouvé dans les années 1920, qui concerne le nombre de domaines nodaux (c'est-à dire le nombre de composantes connexes de $M \backslash \mathcal{N}(\varphi_\lambda)$). Nous renvoyons le lecteur à COURANT et HILBERT (1967) pour un énoncé et une preuve de ce théorème, et au séminaire Bourbaki d'ANANTHARAMAN (2016) pour un compte-rendu des résultats plus récents concernant le nombre de domaines nodaux des fonctions propres (et, surtout, de combinaisons linéaires aléatoires de fonctions propres).

Autres résultats concernant les fonctions propres dans la limite semi-classique. — Soit φ_λ une famille de solutions de (1) sur M, telles que

$$\|\varphi_\lambda\|_{L^2(M)} = 1.$$

Nous avons vu que la conjecture de Yau est un résultat *semi-classique*, décrivant les propriétés des fonctions propres φ_λ lorsque $\lambda \to +\infty$. Il est remarquable que cette conjecture ne fasse intervenir aucune des propriétés de (M, g), comme sa courbure, ou les propriétés de son flot géodésique.

En effet, on peut se poser de nombreuses autres questions sur les propriétés semi-classiques des φ_λ, concernant le comportement des normes $\|\varphi_\lambda\|_{L^p(M)}$, ou les limites faibles des mesures de probabilité $|\varphi_\lambda(x)|^2 \mathrm{d}x$ (appelées *limites semi-classiques*) quand $\lambda \to +\infty$. Toutefois, la réponse à ces questions dépend en général fortement de la variété (M, g), et, plus précisément, des propriétés du flot géodésique.

En fait, on dispose de théorèmes (et de conjectures) beaucoup plus précis sur les variétés de courbure négative. Nous ne discuterons pas ces propriétés ici, mais nous

[3] La valeur propre associée est alors de l'ordre de grandeur de $\sqrt{n}$, par la loi de Weyl.

renvoyons le lecteur à NONNENMACHER (2013) et ZELDITCH (2010) pour un panorama des propriétés semi-classiques des fonctions propres en courbure négative, et à DYATLOV et JIN (2018) et DYATLOV, JIN et NONNENMACHER (2019) pour des résultats récents spectaculaires.

Notons que les propriétés des fonctions propres en courbure négative peuvent être utilisées pour améliorer les résultats connus sur les ensembles nodaux dans ce cadre. Par exemple, dans HEZARI et RIVIÈRE (2016), les auteurs avaient amélioré légèrement la borne (3) pour certaines familles de fonctions propres en courbure négative, tandis que dans HEZARI (2018a), l'auteur améliore légèrement la borne supérieure du théorème 1.7 pour ces mêmes fonctions propres.

Nous renvoyons le lecteur à HEZARI (2018b) et ZELDITCH (2012) pour d'autres propriétés des ensembles nodaux de fonctions propres pouvant être établies en courbure négative, et à NAZAROV, POLTEROVICH et SODIN (2005) et ROY-FORTIN (2015) pour des propriétés de l'ensemble nodal pouvant être établies en dimension 2.

Organisation de l'exposé. — Dans la section 2, nous rappellerons quelques propriétés bien connues des valeurs propres et des fonctions propres du laplacien, et nous expliquerons comment elles permettent de prouver la borne inférieure de la conjecture de Yau en dimension 2.

Dans la section 3, nous expliquerons comment, au lieu de travailler avec des fonctions propres du laplacien, on peut se ramener à travailler avec des solutions d'équations elliptiques ne dépendant pas de la valeur propre λ. Nous formulerons alors un équivalent du théorème 1.7 dans ce cadre, en introduisant la notion d'*indice de doublement* d'une fonction dans une boule.

Cette notion est très liée à celle de *fréquence* d'une solution d'une équation elliptique. Nous rappellerons la définition de cette notion dans la section 4, en énonçant ses propriétés de monotonie.

Enfin, les sections 5 et 6 contiendront les grandes idées de la preuve du théorème 1.7.

Notations. — Dans tout cet exposé, si x est un point de $\mathbb{R}^n$, $B(x,r)$ désignera la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$, tandis que si y est un point d'une variété riemannienne (M,g), la notation $B_g(y,r)$ désignera la boule ouverte de centre y et de rayon r pour la distance induite par la métrique g.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier A. Logunov pour ses encouragements, ainsi que I. Moyano, N. Bourbaki, A. Rivera et J. Toulisse pour leur relecture attentive.

2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES VALEURS PROPRES ET DES FONCTIONS PROPRES

2.1. La première valeur propre du Laplacien

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert d'une variété riemannienne de dimension n, avec un bord de régularité Lipschitz. On note $\lambda_1(\Omega)$ la première valeur propre de l'opérateur de