Séminaire BOURBAKI Janvier 2020
72e année, 2019-2021, no 1173, p. 215 à 235
doi : 10.24033/ast.1162

PHÉNOMÈNES DE TYPE RATNER DANS LES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE VOLUME INFINI [d'après McMullen, Mohammadi, Oh, Benoist, ...]

par **Nicolas Tholozan**

INTRODUCTION

Au début des années 1990, Marina Ratner (1990, 1991a,b) démontre un ensemble de théorèmes de rigidité dans un contexte très général de dynamique homogène : soient G un groupe de Lie semi-simple, Γ un réseau de G et H un sous-groupe de Lie de G. On s'intéresse à l'action à droite du sous-groupe H sur le quotient $\Gamma\backslash G$ ou, dualement, à l'action à gauche de Γ sur l'espace homogène G/H. Dans ce contexte, les théorèmes de Ratner classifient les fermés et les mesures invariantes, à condition que le groupe H contienne « suffisamment » d'éléments unipotents. Citons plus précisément un de ces théorèmes :

Théorème 0.1 (Ratner, 1991b). — *Supposons le groupe H engendré par ses sous-groupes unipotents. Alors, pour tout point x de $\Gamma\backslash G$, il existe un sous-groupe H' de G contenant H tel que*

$$\overline{xH} = xH' .$$

Dans les applications concrètes, on peut souvent lister les sous-groupes de G contenant H et donc classifier les adhérences possibles de H-orbites. En outre, les H' orbites fermées sont des objets extrêmement rigides. Supposons pour simplifier que $\Gamma\backslash G$ est compact, et soit x la classe à gauche de $g \in G$. Alors xH' est fermé dans $\Gamma\backslash G$ si et seulement si $gH'g^{-1}$ intersecte Γ en un réseau de $gH'g^{-1}$. Cette condition est loin d'être générique, et la plupart des H-orbites sont donc denses.

Les applications retentissantes de ces théorèmes sont nombreuses tant en arithmétique qu'en géométrie. Du côté arithmétique, le théorème 0.1 contient par exemple la célèbre *conjecture d'Oppenheim*, démontrée quelques années auparavant par Margulis :

Théorème 0.2 (Margulis, 1989). — *Soit q une forme quadratique de signature $(p, n-p)$ sur $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 3$ et $0 < p < n$. Si q n'est pas multiple d'une forme quadratique à coefficients entiers, alors les valeurs prises par q sur le réseau $\mathbb{Z}^n$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Raghunathan avait en effet remarqué dans les années 70 que la conjecture d'Oppenheim se reformulait de la façon suivante : toute orbite bornée de $H = \mathrm{SO}(2,1)$ sur $\Gamma\backslash G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ est compacte.

Ici, nous nous intéresserons plutôt à l'application géométrique suivante, obtenue indépendamment par Shah :

Théorème 0.3 (Ratner, 1991b ; Shah, 1991). — *Soient $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété hyperbolique compacte*[1] *de dimension 3 et P un plan totalement géodésique de $\mathbb{H}^3$. Alors la projection de P dans M est soit fermée, soit dense.*

Là encore le théorème découle directement du théorème 0.1 appliqué aux groupes $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ et $H = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Pour plus de détails sur les théorèmes de Ratner et leurs applications, on pourra consulter par exemple le livre de Dave Witte Morris (2005).

Des travaux récents de McMullen, Mohammadi et Oh (2017, 2018) et Benoist et Oh (2018) généralisent le théorème 0.3 à une vaste classe de variétés hyperboliques de volume infini, en adaptant certains arguments développés par Margulis dans sa résolution de la conjecture d'Oppenheim.

L'objet de ce texte est de présenter ces résultats, qui sont énoncés de façon plus précise à la fin de la section 1 après quelques rappels sur la géométrie des variétés hyperboliques. Dans la section 2, nous reformulons ces théorèmes dans le langage de la dynamique homogène. Dans la section 3, nous donnons une preuve presque complète du théorème 0.3, adaptée des arguments de McMullen–Mohammadi–Oh. Enfin, dans la section 4, nous présentons les nouvelles idées introduites par ces auteurs pour étendre le théorème 0.3 au cas de variétés convexe-cocompactes.

1. VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

1.1. L'espace hyperbolique (de dimension 3)

Il y a de nombreuses façons de présenter l'espace hyperbolique de dimension 3. Nous optons ici pour le modèle de la boule unité conformément plate dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et définissons donc :

Définition 1.1. L'*espace hyperbolique* $\mathbb{H}^3$ est la boule ouverte de centre 0 de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$ munie de la métrique riemannienne

$$\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{(1 - (x^2 + y^2 + z^2))^2}\,.$$

[1] La théorie de Ratner s'applique plus généralement aux variétés de volume fini. Nous avons choisi ici de nous restreindre à l'énoncé compact par souci de cohérence avec le reste du texte.

L'espace hyperbolique est homogène sous l'action du groupe de ses isométries. Mieux : le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ agit simplement transitivement sur les repères orthonormés, *i.e.* les quadruplés (p, e, u, v) où p est un point de $\mathbb{H}^3$ et (e, u, v) une base orthonormée de $T_p\mathbb{H}^3$. On notera G le sous-groupe d'indice 2 des isométries préservant l'orientation.

Notons o le repère orthonormé $(0, e_1, e_3, -e_2)$, où 0 désigne l'origine de $\mathbb{R}^3$ vu comme point de $\mathbb{H}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, vue comme base orthonormée[2] de $T_0\mathbb{H}^3$. Alors :

– $g \mapsto g \cdot o$ identifie G avec l'espace $F\mathbb{H}^3$ des repères orthonormés directs ;

– $g \mapsto g \cdot 0$ identifie $\mathbb{H}^3$ avec le quotient à droite G/K où K désigne le groupe des isométries linéaires directes de $\mathbb{R}^3$, qui agit isométriquement sur $\mathbb{H}^3$ en fixant 0.

On appelle *bord à l'infini* de $\mathbb{H}^3$ — et on note $\partial\mathbb{H}^3$ — la sphère unité $\mathbb{S}^2$ munie de sa structure conforme. L'action de G sur $\mathbb{H}^3$ s'étend en une action sur $\partial\mathbb{H}^3$ par transformations conformes et, réciproquement, toute transformation conforme de $\partial\mathbb{H}^3$ s'étend en une unique isométrie de $\mathbb{H}^3$. Via la projection stéréographique de $\mathbb{S}^2$ depuis le point $(0, 0, 1)$ sur le plan $\{z = 0\}$, on identifie le groupe G au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\pm\mathrm{Id}$ agissant sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par homographies.

Les *géodésiques* de $\mathbb{H}^3$ sont les arcs de cercle et les segments de droites orthogonaux à la sphère unité $\mathbb{S}^2$. Si S est une sphère euclidienne ou un plan dans $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\mathbb{S}^2$, alors $P = S \cap \mathbb{H}^3$ est une sous-variété totalement géodésique de $\mathbb{H}^3$ de dimension 2, qu'on appellera donc un *plan*.

Le groupe G agit transitivement sur les géodésiques et sur les plans de $\mathbb{H}^3$. Notons P_o le plan orienté de $\mathbb{H}^3$ d'équation $y = 0$ et H son stabilisateur dans G. Alors l'application

$$g \longmapsto g \cdot P_o$$

identifie l'espace $\mathcal{P}$ des plans orientés de $\mathbb{H}^3$ au quotient à droite G/H. Via la projection stéréographique, le groupe H est identifié au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, qui agit sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en préservant de demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^+ = \{x + iy \mid y > 0\}$. Tout plan P de $\mathbb{H}^3$ possède un bord à l'infini ∂P qui est un cercle de $\partial\mathbb{H}^3$ et, réciproquement, tout cercle de $\partial\mathbb{H}^3$ est le bord à l'infini d'un unique plan de $\mathbb{H}^3$. L'espace $\mathcal{P}$ est donc aussi l'espace des cercles orientés de $\partial\mathbb{H}^3$.

Rappelons enfin qu'un *horocycle* et une *horosphère* désignent réciproquement un cercle et une sphère contenus dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ et tangents à $\partial\mathbb{H}^3$ en un unique point (ou, plus précisément, le complémentaire de ce point de tangence dans le cercle ou la sphère). Les horocycles et horosphères sont les orbites de l'action sur $\mathbb{H}^3$ des sous-groupes unipotents de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

---

[2] Ce choix peu conventionnel permet que, via l'identification de G avec $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui nous a semblé la plus naturelle, le sous-groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ s'identifie bien au stabilisateur du plan engendré par les deux premiers vecteurs du repère o.

1.2. 3-variétés hyperboliques et groupes kleinéens

Une 3-*variété hyperbolique* est une variété différentielle de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante -1. Elle est *complète* si toutes ses géodésiques se prolongent en temps infini. Sans perte de généralité, on supposera toujours que nos variétés sont orientées.

Soit M une variété hyperbolique complète. Le revêtement universel de M est isomorphe à $\mathbb{H}^3$, et M s'identifie donc au quotient de $\mathbb{H}^3$ par un *groupe kleinéen* Γ, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Les propriétés topologiques et géométriques de M se trouvent être étroitement liées aux propriétés dynamiques de l'action de Γ sur $\partial\mathbb{H}^3$.

Définition 1.2. Un groupe kleinéen est :
- *élémentaire* s'il fixe un point dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ ou une géodésique de $\mathbb{H}^3$;
- *Zariski dense*[3] s'il est non élémentaire et ne préserve pas un plan de $\mathbb{H}^3$.

Proposition 1.3. — *Soit Γ un groupe kleinéen non élémentaire de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. *Alors :*
- *l'action de Γ sur $\partial\mathbb{H}^3$ admet un unique fermé invariant minimal, noté Λ_Γ ;*
- *Γ agit proprement discontinûment sur le complémentaire de Λ_Γ, noté Ω_Γ.*

On appelle Λ_Γ *l'ensemble limite* de Γ et son complémentaire Ω_Γ le *domaine de discontinuité* de Γ. Le quotient $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ peut être vu comme le bord conforme de $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. Plus précisément, le quotient

$$\overline{M} = \Gamma\backslash(\mathbb{H}^3 \cup \Omega_\Gamma)$$

est une variété à bord qui peut être munie d'une métrique riemannienne dont la restriction à M est conforme à la métrique hyperbolique, et dont la restriction au bord $\partial M = \Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ est dans la classe conforme héritée de $\partial\mathbb{H}^3$.

Définition 1.4.
- L'*enveloppe convexe* de Λ_Γ, notée $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$, est le plus petit convexe fermé non vide de $\mathbb{H}^3$ invariant par Γ.
- Son quotient par Γ est le *cœur convexe* de M, noté $\mathrm{Core}(M)$.

On notera également $\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$ l'intérieur de $\mathrm{Conv}(\Lambda_\Gamma)$ et $M^* = \Gamma\backslash\mathrm{Conv}^*(\Lambda_\Gamma)$ l'intérieur de $\mathrm{Core}(M)$.

Le complémentaire de $\mathrm{Core}(M)$ dans M est homéomorphe à $(\Gamma\backslash\Omega_\Gamma) \times \mathbb{R}_+^*$. Ses composantes connexes sont parfois appelées *vasques* de M. La projection orthogonale fournit une rétraction de $\overline{M}$ sur $\mathrm{Core}(M)$, qui capture donc toute la topologie de $\overline{M}$. En fait, dès que Γ est Zariski-dense, $\mathrm{Core}(M)$ est d'intérieur non vide et $\overline{M}$ est homéomorphe à $\mathrm{Core}(M)$.

[3] Le lecteur pourra se convaincre que cette définition *ad hoc* est bien équivalente à la densité de Γ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ vu comme groupe algébrique réel et muni de sa topologie de Zariski.

On peut maintenant introduire les notions de groupe kleinéen *convexe-cocompact* et *géométriquement fini*.

Définition 1.5. Le groupe Γ (ou la variété $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$) est

– *convexe-cocompact(e)* si $\mathrm{Core}(M)$ est compact,

– *géométriquement fini(e)* si le ε-voisinage du cœur convexe $\mathrm{Core}(M)$ est de volume fini[4] pour $\varepsilon > 0$.

La pertinence de ces définitions est soulignée par leurs nombreuses autres caractérisations (discutées entre autres dans Bowditch (1993)). Par exemple, Γ est convexe-cocompact si et seulement s'il est de type fini et *quasi-isométriquement plongé* dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Il est géométriquement fini si et seulement si $\mathrm{Core}(M)$ est la réunion d'une partie compacte et d'un nombre fini de *pointes*, dont le groupe fondamental fixe une horosphère de $\partial\mathbb{H}^3$.

Exemple 1.6. Si Γ est un réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, alors $\Lambda_\Gamma = \partial\mathbb{H}^3$ et $M = \mathrm{Core}(M) = \overline{M}$ est géométriquement finie. De plus, Γ est convexe-cocompact si et seulement s'il est cocompact.

Exemple 1.7. Soit Γ un réseau uniforme de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Alors Λ_Γ est le cercle $\mathbb{R}\cup\{\infty\} \subset \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, son complémentaire est l'union des demi-plans supérieur et inférieur, et $\mathrm{Conv}(\Gamma)$ est le plan P_o. La variété $\overline{M}$ est homéomorphe à $(\Gamma\backslash P_o)\times[-1,1]$. On dit que Γ est un groupe *fuchsien*.

Exemple 1.8. Soit Γ un groupe fuchsien et $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ un morphisme suffisamment proche de l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Alors $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$ est une courbe de Jordan et son complémentaire est l'union disjointe de deux disques ouverts. La variété $\overline{M}$ est encore homéomorphe à $(\rho(\Gamma)\backslash P_o)\times[-1,1]$, mais son cœur convexe est maintenant d'intérieur non vide. On dit que $\rho(\Gamma)$ est un groupe *quasi-fuchsien*.

1.3. Topologie des 3-variétés

Pour énoncer précisemment les résultats de McMullen–Mohammadi–Oh, nous devons encore introduire certaines restrictions topologiques sur les 3-variétés étudiées. Dans cette section, $\overline{M}$ désigne une variété orientable compacte à bord de dimension 3. On supposera en outre que le bord de $\overline{M}$ ne contient pas de sphère ni de tore.

Une sphère plongée dans $\overline{M}$ est dite *incompressible* si elle ne borde pas une boule. Une surface connexe Σ de genre supérieur ou égal à 1 plongée dans $\overline{M}$ est dite *incompressible* si le morphisme $\pi_1(\Sigma) \to \pi_1(\overline{M})$ est injectif.

On dit que $\overline{M}$ est *irréductible* si elle ne contient pas de sphère incompressible (autrement dit, si $\overline{M}$ n'est pas la somme connexe de deux variétés). On dit que le bord de $\overline{M}$ est incompressible si chacune de ses composantes connexes est incompressible. Enfin, la variété $\overline{M}$ est dite *atoroïdale* si $\overline{M}$ ne contient pas de tore incompressible.

[4] Lorsque Γ est Zariski dense, M est géométriquement finie si et seulement si $\mathrm{Core}(M)$ est de volume fini.