Séminaire BOURBAKI Avril 2021
72e année, 2019–2021, no 1176, p. 295 à 343
doi : 10.24033/ast.1165

PROGRÈS RÉCENTS SUR LA CONJECTURE DE ZAGIER ET LE PROGRAMME DE GONCHAROV [d'après Goncharov, Rudenko, Gangl,...]

par **Clément Dupont**

INTRODUCTION

La fonction zêta d'un corps de nombres F (extension finie du corps des rationnels) a été définie par Dedekind sous la forme

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} \qquad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\big)\,,$$

où la somme porte sur les idéaux non nuls de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$, et $N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}|$ est la norme. C'est un invariant arithmétique fondamental d'un corps de nombres, qui généralise la fonction zêta de Riemann $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$. Zagier (1986, 1991) a conjecturé que la valeur spéciale $\zeta_F(n)$, pour un entier $n \geq 2$, s'exprime de manière précise en termes d'évaluations en des éléments de F du n-ième polylogarithme classique

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^n} \qquad \big(z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\big)\,.$$

Cette conjecture vise à généraliser la formule analytique du nombre de classes, qui exprime le résidu de la fonction zêta en $s = 1$ en termes de logarithmes d'unités.

Les travaux fondateurs de Borel (1974, 1977) sur la cohomologie du groupe linéaire permettent de relier $\zeta_F(n)$ au covolume d'un groupe de K-théorie de F à l'intérieur d'un espace euclidien via le *régulateur*

$$K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n}\,,$$

pour un entier d_n qui dépend de F, défini plus bas par (7). La conjecture de Zagier devient alors un énoncé en K-théorie : il s'agit de produire un cocycle explicite, exprimé grace à la fonction Li_n, pour la classe de cohomologie du groupe linéaire qui donne naissance au régulateur. Concrètement, cela consiste à découvrir et organiser les équations fonctionnelles des polylogarithmes, ce qui revient souvent à des considérations non triviales de géométrie projective élémentaire. Après la preuve du cas $n = 2$ de la conjecture[1] par ZAGIER (1986), cette stratégie a permis à GONCHAROV (1991, 1994, 1995a,b) de prouver le cas $n = 3$. On renvoie aux exposés à ce séminaire d'OESTERLÉ (1993) et de CATHELINEAU (1993) pour des comptes rendus de ces résultats. Des obstructions nouvelles apparaissent pour $n = 4$, ce qui explique qu'il ait fallu attendre une vingtaine d'années de plus pour voir une preuve de ce cas de la conjecture de Zagier, par GONCHAROV et RUDENKO (2018). Le premier objectif de ce texte est de décrire les enjeux et les grandes lignes de cette preuve.

Afin de comprendre la nécessité d'ingrédients supplémentaires dans le cas $n \geq 4$, un point de vue motivique sur la conjecture de Zagier est utile. La philosophie des motifs, due à Grothendieck, est celle d'une catégorie qui serait le réceptacle d'une théorie de cohomologie universelle pour les variétés algébriques (concentrant en un objet les groupes de cohomologie singulière, de de Rham, ℓ-adique, *etc.*) et où les morphismes seraient liés aux cycles algébriques. Dans la vision de BEILINSON (1985) et de DELIGNE (1985), le régulateur devrait être induit par la réalisation de Hodge au niveau des groupes d'extensions via la formule

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(F)}\big(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)\big) \simeq K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}\,. \tag{1}$$

On a noté $\mathrm{MT}(F)$ la catégorie tannakienne des motifs de Tate mixtes sur F, qui existe inconditionnellement grâce aux résultats de BOREL (1974, 1977) et aux travaux de VOEVODSKY (2000) et LEVINE (1993), et pour laquelle la formule ci-dessus est vérifiée. Dans ce cadre, la conjecture de Zagier affirme que les extensions (1) proviennent toutes de certains motifs « polylogarithmiques », dont les $\mathrm{Li}_n(z)$ sont des périodes.

Pour $n \leq 3$ la situation est particulièrement favorable, puisqu'on s'attend à ce que *tous* les motifs qui sont des extensions itérées de $\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(-1), \mathbb{Q}(-2), \mathbb{Q}(-3)$ proviennent de motifs polylogarithmiques. Pour $n \geq 4$ ce n'est plus le cas et de nouveaux motifs doivent être pris en compte, associés aux polylogarithmes *multiples*

$$\mathrm{Li}_{n_1,\ldots,n_r}(z_1,\ldots,z_r) = \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r} \frac{z_1^{k_1}\cdots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1}\cdots k_r^{n_r}}\,.$$

Le problème devient beaucoup plus subtil : du point de vue des périodes, il faut montrer que *certaines* combinaisons linéaires spéciales de polylogarithmes multiples — celles qui sont des périodes d'extensions (1) — s'expriment en termes de polylogarithmes classiques. Dans cette direction, GANGL (2016) a apporté une contribution cruciale en démontrant une équation fonctionnelle, prévue par GONCHAROV (1994, 1995a), reliant $\mathrm{Li}_{3,1}$ et Li_4. Celle-ci a été redécouverte par GONCHAROV et RUDENKO (2018) qui l'incorporent à un contexte général, inspiré par les travaux de FOCK et GONCHAROV (2009) sur le dilogarithme, où la structure des polylogarithmes multiples est organisée par la combinatoire des structures amassées. La structure opéradique des dissections de polygones joue notamment un rôle central, en lien avec le formalisme des corrélateurs,

[1] ZAGIER (1986) a découvert et prouvé une version faible du cas $n = 2$ de la conjecture par des méthodes de géométrie hyperbolique. La preuve de la version forte, qu'on peut trouver chez GONCHAROV (1995a), est un assemblage de résultats dus à BLOCH (1977, 1978), DUPONT et SAH (1982), DUPONT (1987), et SUSLIN (1990).

qui sont des variantes des polylogarithmes multiples introduites par Goncharov (2019).

Au vu de la discussion précédente, les résultats dont il sera question dans ce texte s'inscrivent dans une stratégie vers la conjecture de Zagier découpée en deux étapes distinctes et relativement indépendantes :

1) La première étape consiste à démontrer une conjecture de Zagier « faible »[2] qui fait intervenir les polylogarithmes *multiples*. De manière imprécise, il s'agit de donner une « formule » pour le régulateur de Borel en termes de polylogarithmes multiples. Goncharov (2005b) a apporté une contribution importante dans cette direction en décrivant le régulateur de Borel via une fonction appelée polylogarithme grassmannien (univalué). Charlton, Gangl et Radchenko (2019) donnent une formule pour une variante multivaluée de cette fonction, introduite par Goncharov (2013), en termes de polylogarithmes multiples. Ces résultats suggèrent qu'on dispose aujourd'hui de tous les ingrédients nécessaires à la réalisation de cette première étape[3].

2) La deuxième étape consiste à passer des polylogarithmes multiples aux polylogarithmes classiques. Cette étape se passe au niveau de versions motiviques de ces fonctions, où une structure (comultiplicative) supplémentaire permet de distinguer les périodes d'extensions (1). Le caractère inexplicite du formalisme motivique amène en fait à travailler avec des versions « symboliques » des polylogarithmes multiples, ce qui demande une compréhension fine des relations fonctionnelles qu'ils satisfont.

Le programme de Goncharov

Un des enjeux de la conjecture de Zagier est de décrire explicitement la K-théorie des corps de nombres. Les travaux de Matsumoto (1969) sur le K_2 prolongés par Milnor (1970), ainsi que ceux de Suslin (1990) sur le K_3, laissent à penser que le cas des corps de nombres n'est pas spécial et qu'il existe des descriptions explicites uniformes des groupes de K-théorie de tous les corps. Le point de vue motivique permet d'éclairer cette question : en admettant des conjectures générales on dispose pour tout corps F d'une catégorie $\mathrm{MT}(F)$ où les groupes d'extensions sont reliés à la K-théorie par une formule qui raffine (1). Le formalisme tannakien fournit donc des *complexes motiviques* qui calculent les groupes de K-théorie de F (ou plus précisément les gradués pour la γ-filtration définie par Soulé (1985)).

Une idée centrale de Goncharov (1994, 1995a) est de s'inspirer de ces complexes motiviques pour donner des descriptions inconditionnelles de la K-théorie des corps qui soient aussi explicites et « petites » que possible. Du point de vue motivique, l'enjeu est de donner une définition inconditionnelle de la catégorie $\mathrm{MT}(F)$ « par générateurs

[2] Ce terme est parfois utilisé pour qualifier les résultats de Beilinson et Deligne (1994) et de de Jeu (1995), qui sont de nature différente.

[3] Les résultats de Gerdes (1991) vont dans la même direction puisqu'ils donnent une description d'une partie de la K-théorie rationnelle des corps en termes de géométrie projective *linéaire* et donnent donc du poids à la conjecture selon laquelle les extensions (1) proviennent toutes de motifs polylogarithmiques multiples.

et relations », le rôle des générateurs étant joué par les polylogarithmes multiples (motiviques) ou par certaines variantes. On rassemble ici sous le terme *programme de Goncharov* l'ensemble cohérent de constructions et de conjectures développées par Goncharov dans cette direction durant les trente dernières années. Le second objectif de ce texte est d'en présenter certaines idées directrices (et notamment la *conjecture de liberté* et la *conjecture de profondeur*) et de placer dans ce cadre les résultats de GANGL (2016) et de GONCHAROV et RUDENKO (2018), mais aussi des contributions de CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) et de RUDENKO (2020).

Organisation de ce texte. — Au §1 on présente la conjecture de Zagier et ses liens avec la K-théorie. On y aborde le problème des relations polylogarithmiques et on définit les *complexes polylogarithmiques* de GONCHAROV (1994, 1995a). Le §2 introduit les catégories de motifs de Tate mixtes et leur formalisme tannakien. Dans ce cadre, on étudie dans les §§3–4 les versions motiviques des polylogarithmes (multiples), qui mènent à une interprétation motivique de la conjecture de Zagier. On énonce et analyse la *conjecture de liberté* et la *conjecture de profondeur* de Goncharov, qui sont des énoncés généraux sur la structure de la catégorie des motifs de Tate mixtes sur un corps.

Après avoir introduit les corrélateurs, qui sont des variantes des polylogarithmes multiples, on étudie au §5 les résultats de GANGL (2016) et de GONCHAROV et RUDENKO (2018) sur la structure fine des motifs de Tate mixtes en poids ≤ 4, qui mènent à la preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 4$. Un rôle important est joué par certaines familles de relations entre polylogarithmes multiples qui trouvent leur origine dans l'étude des structures amassées, point de vue qu'on développe au §6. On conclut en mentionnant les travaux récents de RUDENKO (2020) sur la conjecture de profondeur.

Il est ici question d'un sujet aux multiples ramifications dont certains des aspects importants n'apparaissent pas dans ce texte, par manque de place. C'est notamment le cas des liens avec la géométrie hyperbolique (voir par exemple GONCHAROV (1999), BROWN (2013), RUDENKO (2020)) et des aspects « non génériques » reliés à la K-théorie de variétés générales et aux classes caractéristiques (voir par exemple GONCHAROV (1993), GONCHAROV et RUDENKO (2018)).

Notations et conventions. — Pour des nombres complexes non nuls a, b on note

$$a \underset{\mathbb{Q}^\times}{\sim} b$$

pour signifier que l'on a $a \in \mathbb{Q}^\times b$. Pour un groupe abélien A on note $A_\mathbb{Q} = A \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. On note $\mathbb{Q}[X]$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel librement engendré par les éléments d'un ensemble X et $f : \mathbb{Q}[X] \to V$ l'application linéaire induite par une application f de X vers un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V. On note V_n la composante homogène de degré n d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué V. Tous les espaces vectoriels, algèbres, *etc.* sont implicitement définis sur $\mathbb{Q}$.

Remerciements. — Je tiens à remercier Herbert Gangl, Alexander Goncharov, et Daniil Rudenko pour leur aide précieuse dans la préparation de ce texte et la patience avec laquelle ils m'ont expliqué leurs travaux. Un grand merci aussi à Francis Brown, José Ignacio Burgos Gil, Damien Calaque, Rob de Jeu, Javier Fresán, Richard Hain, et Don Zagier pour leurs commentaires et suggestions sur une version préliminaire de ce texte.

1. LA CONJECTURE DE ZAGIER

1.1. La formule analytique du nombre de classes

Soit F un corps de nombres, dont on note r_1 le nombre de plongements réels (numérotés $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$) et r_2 le nombre de paires de plongements complexes conjugués non réels (numérotés $\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}, \overline{\sigma_{r_1+1}}, \ldots, \overline{\sigma_{r_1+r_2}}$), de sorte que le degré de F est $[F:\mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$.

Le *régulateur de Dirichlet* est le morphisme de groupes abéliens

$$\rho : \mathcal{O}_F^\times \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2} \tag{2}$$

défini par $\rho(x) = (\log|\sigma_1(x)|, \ldots, \log|\sigma_{r_1}(x)|, \log|\sigma_{r_1+1}(x)|^2, \ldots, \log|\sigma_{r_1+r_2}(x)|^2)$ pour $x \in \mathcal{O}_F^\times$, et $\rho(k) = \frac{1}{r_1+r_2}(k, \ldots, k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Le théorème des unités de Dirichlet affirme que ρ est injectif modulo torsion et que son image est un réseau de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$; le régulateur de F, noté R_F, est le covolume de ce réseau.

La *formule analytique du nombre de classes* exprime le résidu de la fonction zêta de F en $s = 1$ en termes du régulateur, du nombre w_F de racines de l'unité dans F, du discriminant D_F, et du nombre de classes h_F :

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^{r_1+r_2} h_F}{w_F} \cdot \frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|D_F|}} R_F \,. \tag{3}$$

Comme son nom l'indique, son intérêt premier est de donner accès au nombre de classes. Cependant, nous nous intéresserons ici à la partie *transcendante* de la formule, écrite sous la forme

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta_F(s) \underset{\mathbb{Q}^\times}{\sim} \frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|D_F|}} \det\big(\log|\sigma_i(\varepsilon_j)|\big)_{1\le i,j\le r_1+r_2-1} , \tag{4}$$

où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2-1})$ est une base de $\mathcal{O}_F^\times$ modulo torsion.

1.2. Polylogarithmes et conjecture de Zagier

Zagier (1991) a conjecturé une généralisation de la formule (4) à toutes les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind, où le logarithme doit être remplacé par les polylogarithmes. Pour un entier $n \geq 1$, rappelons la définition du n-ième *polylogarithme classique* :

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k\ge 1} \frac{z^k}{k^n} \qquad \big(z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\big) \,. \tag{5}$$

On renvoie le lecteur à Lewin (1981) pour une histoire de ces fonctions qui remonte à Leibniz. On a $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et l'équation différentielle $\mathrm{Li}_n'(z) = \frac{1}{z}\mathrm{Li}_{n-1}(z)$,