Séminaire BOURBAKI Mai 2021
72e année, 2019–2021, no 1180, p. 459 à 521
doi : 10.24033/ast.1169

LA PROPRIÉTÉ (T) POUR LES GROUPES POLONAIS ROELCKE-PRÉCOMPACTS
[d'après Ibarlucía, s'appuyant sur des travaux de Ben Yaacov et Tsankov]

par **François Le Maître**

INTRODUCTION

Née au début des années 2000 dans les travaux de Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov (2008), la théorie des modèles métrique, ou théorie des modèles continue, permet d'étendre des techniques issues de la théorie des modèles classique à de nouveaux objets issus de l'analyse.

Dans ce texte, nous allons nous intéresser à une utilisation récente et remarquable de la théorie des modèles continue dans le cadre des groupes polonais : la preuve par Ibarlucía (2021) du fait que tout groupe polonais Roelcke-précompact a la propriété (T) de Kazhdan.

Cette preuve illustre très bien la capacité de la théorie des modèles à offrir une approche unifiée à des problèmes (ou plutôt ici, des groupes) a priori très différents. Elle s'appuie sur une notion avancée (tout du moins à mes yeux !) de théorie des modèles continue, la stabilité locale. Elle utilise également le langage des imaginaires métriques (Ben Yaacov, 2018), ce qui la rend particulièrement élégante mais difficile à comprendre pour une personne peu familière avec la théorie des modèles continue.

Il m'a donc semblé préférable de donner la preuve dans un cas particulier mais significatif afin que cet exposé reste accessible à un lectorat large. Pour la même raison, j'ai évité de recourir aux imaginaires métriques au prix d'un argument final plus pédestre. Le cas particulier est celui du groupe $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ des transformations préservant la mesure de l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Pour ce groupe, on peut énoncer le théorème d'Ibarlucía comme suit.

Théorème 0.1 (Ibarlucía, 2021). — *Il existe deux transformations $T_1, T_2 \in \mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ préservant la mesure telles que pour toute $\pi : \mathrm{Aut}([0,1],\lambda) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ représentation unitaire continue sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, s'il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ non nul tel que*

$$\left\|\pi(T_1)\xi - \xi\right\| < \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \|\xi\| \quad et \quad \left\|\pi(T_2)\xi - \xi\right\| < \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \|\xi\|,$$

alors il existe en fait un vecteur $\xi' \in \mathcal{H}$ non nul invariant, *c'est-à-dire tel que pour tout T dans $\mathrm{Aut}(X,\mu)$, on ait $\pi(T)\xi' = \xi'$.*

Après une première section qui expose quelques exemples de groupes polonais, dont $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$,nous présentons la classe des groupes polonais Roelcke-précompacts. On en donne diverses caractérisations, dues à Ben Yaacov et Tsankov, notamment la description comme groupes d'automorphismes agissant de manière approximativement oligomorphe.

La section 3 donne un bref aperçu de la propriété (T) dans le cadre des groupes polonais. Le théorème d'Ibarlucía y est énoncé sous sa forme générale et contextualisé. On explicite les transformations T_1 et T_2 qui apparaissent dans l'énoncé ci-dessus, qui proviendront d'une action « très libre » préservant la mesure du groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2$. On y justifie aussi la présence de la constante $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ dans l'énoncé ci-dessus tout en expliquant pourquoi ce résultat se ramène à montrer que toute représentation orthogonale de $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ sans vecteurs invariants se restreint en une représentation de $\mathbb{F}_2$ qui est un multiple de sa représentation régulière(théorème 3.10). Pour des raisons de simplicité, on se focalisera sur un énoncé plus faible et on montrera simplement qu'une telle représentation contient une copie de la représentation régulière de $\mathbb{F}_2$ (théorème 3.11). On indiquera cependant au lectorat familier avec l'indépendance relative dans les espaces de probabilitécomment obtenir le théorème 3.10, et ce à la toute fin de l'exposé.

Les deux sections suivantes mettent en place les bases de théorie des modèles métrique nécessaire à la preuve. Tout groupe polonais peut en effet se voir comme groupe d'automorphismes d'une *structure métrique séparable*. Cette dernière le reflète particulièrement bien dans le cadre du théorème de Ryll–Nardzewzki où le groupe est Roelcke-précompact et la structure $\aleph_0$-catégorique. Cette idée cruciale est exploitée depuis quelques années (Ben Yaacov, 2018 ; Ben Yaacov, Ibarlucía et Tsankov, 2018 ; Ibarlucía, 2016, 2017) et est apparue pour la première fois dans les travaux de Ben Yaacov et Tsankov (2016).

Étant donnée une structure métrique, on définit dans la section 4 une algèbre de fonctions à valeurs réelles sur cette structure (la $\mathbb{R}$-algèbre de Banach des *prédicats définissables*) qui correspond à *ce que la théorie des modèles continue peut nous dire de cette structure*. Un des points essentiels est que cette algèbre de fonctions peut en fait être *interprétée* dans toute structure satisfaisant la même *théorie* que notre structure de départ, et il nous faudra commencer par développer les notion de *langage métrique* et de *formules* associées afin de définir proprement ce qu'on entend par là.

Une autre particularité importante de l'algèbre des prédicats définissables est qu'elle est stable par infimums ou supremums sur la structure elle-même. Comme on le verra, cette propriété est cruciale dans la preuve du théorème principal. Les *types* sont les caractères (morphismes à valeur réelle) de l'algèbre des prédicats définissables, l'exemple de base d'un type étant donné par l'évaluation des prédicats définissables sur un point de la structure.

On a alors une correspondance de Gelfand qui nous permet d'identifier les prédicats définissables aux fonctions continues sur l'espace des types. Certaines sous-structures particulières (les sous-structures *élémentaires*) interpréteront les prédicats définissables de la même manière que la structure ambiante, et en particulier elles verront les mêmes infimums et supremums que cette dernière lorsque cela a du sens.

Les *sous-ensembles définissables* d'une structure, étudiés dans la section 5, sont en quelque sorte les sous-ensembles que la théorie des modèles « voit ». Notamment, lorsque l'on applique un infimum ou un supremum à un prédicat définissable restreint à un sous-ensemble définissable, on obtient un prédicat définissable (*cf.* proposition 5.10), ce qui est crucial pour la preuve du théorème 0.1. Le théorème de Ryll–Nardzewski implique en effet que le complété à gauche du groupe des automorphismes de toute structure $\aleph_0$-catégorique s'identifie à un sous-ensemble définissable de la structure, permettant ainsi de « transférer » une action par isométries du groupe sur la structure (*cf.* Ben Yaacov (2018) pour une formulation précise en termes d'imaginaires métriques). On renvoie à l'appendice pour la preuve du théorème de Ryll–Nardzewski ; on l'établira de manière directe pour $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ à la fin de la section 5, prouvant au passage que la théorie de la structure qui lui est associée a l'*élimination des quantificateurs*.

Nous donnerons enfin les éléments de preuve du théorème 0.1 dans la section 6. On partira d'une représentation orthogonale de G sans vecteurs invariants que l'on l'étendra en une représentation orthogonale de son complété à gauche, de sorte à transférer la représentation orthogonale sur la structure via le théorème de Ryll–Nardzewski. Il s'agira alors d'exploiter les propriétés d'indépendance de l'action préservant la mesure du groupe libre afin de voir que la restriction de notre représentation orthogonale au groupe libre est un multiple de sa représentation régulière. C'est ici que la théorie des modèles jouera son rôle, permettant de transférer une propriété d'une sous-structure élémentaire à la structure entière pour mener à une contradiction.

Terminons cette introduction en mentionnant les différences entre la preuve pour $\mathrm{Aut}([0,1],\lambda)$ et celle du théorème général d'Ibarlucía, qui nécessite un travail supplémentaire conséquent. Dans le cas général, on part d'une action « très libre » du groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur une structure $\aleph_0$-catégorique *quelconque*, pour laquelle la liberté de l'action s'énonce en termes de *relation d'indépendance stable*. Pour exhiber une telle action, on utilise notamment une construction combinatoire astucieuse d'*intervalles* sur $\mathbb{F}_2$ ayant des propriétés qui généralisent celles des intervalles de $\mathbb{Z}$. De plus, il faut se débarrasser de la « partie compacte » de G : les raisonnements de la section 6 n'auraient aucune chance d'aboutir pour un groupe compact puisqu'ils reposent sur la richesse du complété à gauche. Enfin, il faut exploiter les propriétés combinatoires des intervalles de $\mathbb{F}_2$ afin de comprendre la représentation que l'on obtient. Je renvoie le lectorat à Ibarlucía (2021), notamment la fin de l'introduction qui décrit clairement la construction si l'on remplace $\mathbb{F}_2$ par $\mathbb{Z}$, en espérant que cet exposé lui aura auparavant fourni quelques clés de lecture.

Remerciements. — Je remercie chaleureusement Tomás Ibarlucía et Todor Tsankov pour les conversations enrichissantes que nous avons pu avoir autour de la théorie des modèles continue, et que j'espère que nous continuerons d'avoir ! Merci à Todor également pour m'avoir indiqué une preuve du théorème de Ryll–Nardzewski qui ne fasse pas appel au théorème de compacité. Enfin, un grand merci à Nicolas Bourbaki, Alessandro Carderi, Colin Jahel, Adriane Kaïchouh, Romain Tessera et Todor Tsankov pour leur relecture attentive.

1. QUELQUES EXEMPLES DE GROUPES POLONAIS

Un *espace polonais*[1] est un espace topologique séparable admettant une distance compatible complète. Un *groupe polonais* est un groupe topologique dont la topologie est polonaise. Les groupes polonais apparaissent naturellement comme groupes de symétries de diverses structures mathématiques. Lorsque la structure est « de dimension finie » on obtient assez souvent un groupe localement compact, mais les groupes polonais dont il sera question dans cet exposé proviendront plutôt de structures de dimension infinie (mais néanmoins séparables), comme par exemple un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Voici trois faits très utiles sur les espaces et groupes polonais.

Fait 1. — Tout produit dénombrable d'espaces polonais est un espace polonais.

Fait 2. — Tout fermé d'un espace polonais est un espace polonais.

Fait 3. — Les sous-groupes d'un groupe polonais qui sont polonais pour la topologie induite sont exactement ses sous-groupes fermés.

Le premier fait se montre en exhibant une distance compatible complète sur le produit, comme celle que l'on considère dans la convention donnée en début de section 2. Le deuxième est immédiat une fois qu'on sait qu'un espace métrique est séparable si et seulement s'il est à base dénombrable d'ouverts. Le troisième utilise un renforcement du deuxième qui caractérise les sous-espaces polonais d'un espace polonais comme en étant les G_δ (intersections dénombrables d'ouverts), et est une jolie application du théorème de Baire (voir la proposition 2.2.1 de Gao, 2009).

1.1. Groupes d'automorphismes de structures dénombrables

L'intérêt de la définition qui suit réside dans la variété des exemples qu'elle permet de traiter.

Définition 1.1. Soit X un ensemble non vide. Une **structure discrète** sur X est la donnée d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ de **fonctions** et d'une famille $(R_j)_{j\in J}$ de **relations** telles que :

- ▹ pour tout $i \in I$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $f_i : X^{n_i} \to X$ (l'entier n_i est appelé l'**arité** de la fonction f_i) ;

[1] Cette terminologie, suggérée initialement « pour rire » par Godement à Bourbaki en 1949, rend hommage aux nombreuses contributions des mathématiciens polonais dans ce domaine, *cf.* note au bas de la page 67 de Godement (2003).

- pour tout $j \in J$, il existe $m_j \in \mathbb{N}$ tel que $R_j \subseteq X^{m_j}$ (l'entier m_j est appelé l'**arité** de la relation R_j)

Remarquons que l'on autorise des fonctions d'arité 0, que l'on voit comme des éléments de X, aussi appelées **constantes**. Par exemple un groupe $(G, e, \cdot, {}^{-1})$ est une structure où e est la constante représentant l'élément neutre, « $\cdot$ » est le produit de groupe et « ${}^{-1}$ » le passage à l'inverse.

Voici des exemples qui devraient vous convaincre, si besoin est, qu'un grand nombre de structures qui apparaissent en mathématiques peuvent être vues comme des structures discrètes, au prix d'un nombre parfois élevé de fonctions et de relations.

- Un graphe orienté $G = (V, E)$ (sans arête multiple) est une structure discrète sur l'ensemble V, avec pour unique relation $E \subseteq V \times V$. Un graphe colorié par deux couleurs de sommets 0 et 1 peut aussi être vu comme une structure discrète en ajoutant deux relation unaires R_0 et R_1 qui encodent respectivement l'ensemble des sommets de couleur 0 et ceux de couleur 1. On peut également voir comme des structures discrètes les graphes à arêtes multiples (en ajoutant des relations binaires) ou encore les complexes simpliciaux (en ajoutant des relations n-aires).
- Un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ est une structure discrète : outre le vecteur nul qui est une fonction d'arité 0 (constante) et l'addition (fonction binaire), on se donne pour chaque $k \in \mathbb{K}$ une fonction $m_k : E \to E$ qui représente la multiplication par le scalaire k.

Un **plongement** d'une structure discrète $(X, (f_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J})$ est une *injection*

$$\varphi \colon X \longrightarrow X$$

qui commute aux relations et aux fonctions : pour tout $i \in I$, tout $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$,

$$\varphi\big(f_i(x_1, \dots, x_{n_i})\big) = f_i\big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n_i})\big)$$

et pour tout $j \in J$, tout $(x_1, \dots, x_{m_j}) \in X^{m_j}$,

$$(x_1, \dots, x_{m_j}) \in R_j \iff \big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\big) \in R_j.$$

Un **automorphisme** est un plongement surjectif.

Proposition 1.2. — *Soit G le groupe des automorphismes d'une structure dénombrable X. Alors G est un groupe polonais pour la topologie produit sur X^X, l'ensemble X étant muni de la topologie discrète.*

Démonstration. — La composition définit une application continue $X^X \times X^X \to X^X$, et le passage à l'inverse définit une application continue $G \to G$ puisque l'ouvert fermé de (pré)-base $\{g \in G : g(x) = y\}$ est envoyé sur l'ouvert-fermé $\{g \in G : g(y) = x\}$ par l'inversion. Ainsi G est bien un groupe topologique.

Pour voir que G est polonais pour la topologie induite par X^X, on commence par remarquer que l'espace des plongements $X \to X$ est un fermé, donc polonais. L'application qui à $g \in G$ associe (g, g^{-1}) est un homéomorphisme sur son image,