

# Raconte-moi... le processus SLE

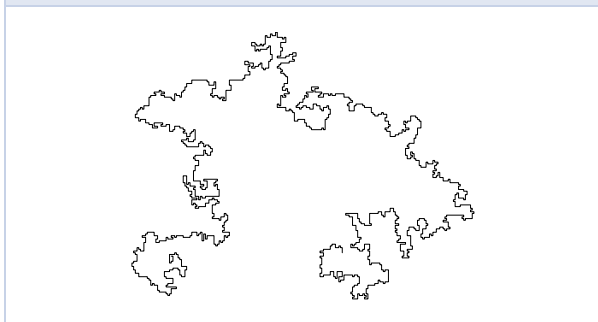
• V. BEFFARA

Soit  $n$  un entier positif : une *marche auto-évitante* de longueur  $n$  sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$  est un chemin discret  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  issu de  $x_0 = 0$ , tel que  $x_i$  et  $x_{i+1}$  soient voisins pour tout  $i$ , et tel que les  $x_i$  soient tous distincts. L'ensemble  $\Omega_n$  des marches auto-évitantes de longueur  $n$  est fini, et il est facile de montrer par un argument de sous-multiplicativité que son cardinal  $c_n$  satisfait à

$$\frac{1}{n} \ln c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \mu$$

avec  $\mu \in (2, 3)$ , appelé *constante de connectivité* de  $\mathbb{Z}^2$ . C'est à peu près tout ce qu'on sait des marches auto-évitantes en dimension 2 ! En particulier on ne connaît pas la valeur exacte de  $\mu$ .

FIGURE 1 – Une longue marche auto-évitante.



Les conjectures ne manquent pas. La plus facile à énoncer concerne toujours  $c_n$  : les physiciens prédisent que

$$c_n = \mu^n n^{11/32 + o(1)}.$$

Le comportement d'une longue marche auto-évitante « typique » (tirée au sort uniformément dans  $\Omega_n$  avec  $n$  grand) reste également mystérieux : on conjecture que l'extrémité fluctue plus que celle d'une marche aléatoire simple, et que

$$E[\|x_n\|^2] = n^{4/3 + o(1)}$$

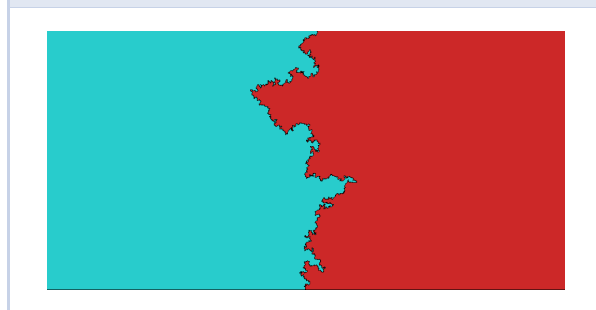
(pour la marche simple, le théorème central limite donne un exposant 1 au lieu de 4/3). Ces valeurs 4/3, 11/32 ... portent le nom d'*exposants critiques*, et on pense qu'ils sont universels : sur un autre

réseau de dimension 2,  $\mu$  sera différent mais les exposants seraient les mêmes.

Plus généralement, on s'attend à ce qu'une telle grande marche ait une *limite d'échelle*, c'est-à-dire que renormalisée par son diamètre, elle converge en loi (dans la limite  $n \rightarrow \infty$ ) vers une certaine courbe aléatoire dans le plan, comme la marche simple converge vers le mouvement brownien.

La question de la convergence reste entièrement ouverte, mais on sait quelle est cette courbe limite si elle existe : il s'agit d'une variante du processus appelé « SLE », un objet introduit par Oded Schramm en 2000 et dont l'étude a fondamentalement changé la compréhension que les mathématiciens ont de la mécanique statistique. Les travaux correspondants ont depuis été récompensés par deux médailles Fields (W. Werner en 2006 et S. Smirnov en 2010).

FIGURE 2 – Un SLE(8/3) dans le demi-plan.



## 1. Invariance conforme

Le cas de la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^2$  est instructif : sa limite d'échelle est explicite, il s'agit du mouvement brownien plan, qui a l'avantage de se prêter facilement à des calculs. Il a la propriété remarquable suivante : si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux domaines simplement connexes du plan (vu comme le plan complexe) contenant 0, et si  $\Phi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$  est une bijection conforme envoyant 0 sur lui-même, alors pour un mouvement brownien  $(B_t)$  arrêté à sa sortie de  $U_1$ , le processus  $(\Phi(B_t))$  est lui-même un

mouvement brownien, arrêté à sa sortie de  $U_2$  (à un changement de temps près).

Ce phénomène, observé pour la première fois par Lévy [7], porte le nom d'*invariance conforme*, et les physiciens prédisent qu'il devrait apparaître dans de nombreux modèles de mécanique statistique. Ils l'expliquent par la méthode du *groupe de renormalisation*, qui permet de comprendre (de manière le plus souvent non rigoureuse) l'apparition de telles symétries supplémentaires à la limite d'échelle, mais les mathématiciens sont loin de pouvoir en faire une étude (mathématiquement) rigoureuse.

Pour formaliser cette intuition dans le cadre qui va nous intéresser, la topologie la plus agréable est la suivante : pour chaque domaine simplement connexe  $U$  du plan complexe, muni de deux points marqués  $a, b \in \partial U$ , on cherche à définir une mesure de probabilité  $\mu_{U,a,b}$  sur l'ensemble des courbes simples dans  $\bar{U}$  partant de  $a$  et arrivant à  $b$  sans toucher  $\partial U$  entre-temps. Il est alors naturel d'introduire la définition suivante : une collection  $(\mu_{U,a,b})$  de mesures de probabilité a la propriété d'*invariance conforme* si pour toute bijection conforme  $\Phi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$  on a l'identité  $\mu_{U_2, \Phi(a), \Phi(b)} = \Phi_* \mu_{U_1, a, b}$  (autrement dit, si  $\gamma$  est une courbe dans  $U_1$  de loi  $\mu_{U_1, a, b}$  alors son image  $\Phi(\gamma)$  a pour loi  $\mu_{U_2, \Phi(a), \Phi(b)}$ ).

Une remarque s'impose, qui nous servira par la suite : le cas où  $U_1 = U_2$  avec les mêmes points marqués est déjà non trivial, parce que  $\Phi$  n'est pas pour autant l'identité, il y a une famille à un paramètre d'applications conformes qui conviennent et  $\mu_{U_1, a, b}$  doit être invariante par tous les éléments de cette famille. Si par exemple  $U_1$  est la bande  $\mathbb{B} = \mathbb{R} \times (0, 1)$  avec les deux points marqués à l'infini des deux côtés, on voit que  $\mu_{\mathbb{B}, -\infty, +\infty}$  doit être invariante par translation le long de  $\mathbb{B}$ . Dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$  avec comme points marqués  $0$  et  $\infty$ ,  $\mu_{\mathbb{H}, 0, \infty}$  doit de même être invariante par changement d'échelle  $z \mapsto \lambda z$  pour tout  $\lambda > 0$ .

## 2. Propriété de Markov de domaine

Une propriété qui est évidente pour la marche auto-évitante uniforme est la suivante : la loi conditionnelle des  $n - k$  derniers pas, conditionnellement aux  $k$  premiers, est uniforme parmi les continuations possibles de ces  $k$  pas. Le même phénomène se produit par exemple dans le cas d'interfaces pour des modèles de mécanique statistique n'ayant que des interactions entre plus proches voisins (comme typiquement le modèle d'Ising).

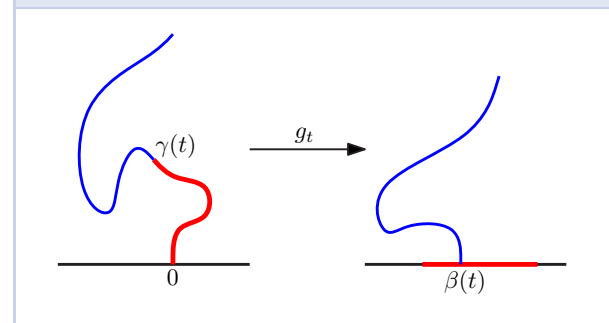
Dans le cas qui nous intéresse, on voudrait formaliser l'intuition suivante : dans un domaine  $U$ , le futur de  $\gamma$  sachant que son segment initial suit une portion de courbe  $\delta$  a la même loi qu'une courbe dans le domaine  $U \setminus \delta$ , et partant de l'extrémité de  $\delta$ . En notant  $\delta^*$  cette extrémité et  $\mu_{U, a, b}^\delta$  la mesure conditionnée, on dira donc que la collection  $(\mu_{U, a, b})$  a la *propriété de Markov de domaine* si pour tous  $U, a, b, \delta$  comme ci-dessus on a  $\mu_{U, a, b}^\delta = \mu_{U \setminus \delta, \delta^*, b}$ .

## 3. Chaînes de Loewner

L'observation fondamentale de Schramm [10] est alors la suivante : il n'existe qu'une famille à un paramètre de collections  $(\mu_{U, a, b})$  satisfaisant à la fois à l'invariance conforme et à la propriété de Markov de domaine, et on peut les décrire explicitement.

Une façon de le voir est tout d'abord de se ramener (par invariance conforme) au cas où  $(U, a, b)$  est le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$  avec comme points marqués  $0$  et  $\infty$ , puis de remarquer que la loi  $\mu_{\mathbb{H}, 0, \infty}$  est alors entièrement déterminée par le comportement *au voisinage de 0* de la courbe. En effet il suffit de réaliser un segment initial  $\delta$  selon cette loi, et la loi de la suite de la courbe est alors obtenue comme image de  $\mu_{\mathbb{H}, 0, \infty}$  par une application conforme de  $\mathbb{H}$  vers  $\mathbb{H} \setminus \delta$ , qui existe par le théorème de Riemann (autrement dit, on peut « couper  $\gamma$  en tranches » et sa loi est caractérisée par celle de la première tranche).

FIGURE 3 – Uniformisation du complémentaire d'une courbe : l'application conforme  $g_t$  envoie  $\mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$  sur  $\mathbb{H}$ .



On peut aller plus loin en suivant une stratégie introduite par Loewner [8] dans un contexte entièrement différent (il cherchait à prouver la conjecture de Bieberbach). Soit donc  $\gamma$  une courbe simple dans  $\mathbb{H}$ , partant de  $0$ ; pour tout  $t \geq 0$ , notons  $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$  le domaine laissé libre par  $\gamma$  au temps  $t$ , et soit  $g_t : H_t \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$  l'unique application conforme telle que  $g_t(z) = z + \mathcal{O}(1/z)$  à l'infini. Quitte