

# SOMMAIRE DU N° 91

---

## SMF

Mot du Président .....	2
Vie de la société .....	3

## MATHÉMATIQUES

Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ? <i>P. Biane</i> .....	4
Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass, <i>Y. Coudène</i> .....	10

## HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Calcul, informatique et théorie de l'information, <i>M.-J. Durand-Richard</i> .....	18
---	----

## INFORMATIONS

CNRS : session d'octobre 2001 .....	31
Crafoord Ceremony, <i>M. Atiyah</i> .....	33
Concours Objectif Science, <i>A. Quéguiner-Mathieu</i> .....	34
Les Olympiades de Mathématiques 2001, <i>J.-C. Novelli</i> .....	35
Revue Pénombre, <i>J.-M. Kantor</i> .....	37
Attribution du Prix Fermat .....	37

## CARNET

J.-L. Lions, <i>G. Tronel</i> .....	39
O. A. Oleinik, <i>G. Tronel</i> .....	44
A. Ducrocq, <i>J.-M. Kantor</i> .....	46

## COURRIER DES LECTEURS

Partenariat entre universités et CNRS, <i>J.-Y. Méréndol</i> .....	47
La politique du CNRS en mathématiques, <i>C. Peskine et M. Enock</i> .....	51
L'histoire de la "modularity conjecture", <i>J.-P. Serre</i> .....	55

LIVRES .....	59
--------------	----

## Mot du Président

Parmi les multiples activités de la SMF, les plus marquantes sont actuellement celles qui concernent la recherche. La situation de l'enseignement scientifique en France n'en reste pas moins l'une des questions qui préoccupent nombre de collègues.

En effet, au cours du conseil d'administration du 17 juin dernier, le point a été fait sur la contribution personnelle de chacun de ses membres aux actions de la SMF et de nouveaux projets se sont dégagés autour d'un thème central : celui de l'enseignement.

Certes, la recherche mathématique française est florissante et ses perspectives de développement prometteuses. Il est cependant crucial de rester vigilant pour maintenir ce niveau d'excellence et garantir l'avenir. Un nombre croissant de métiers nécessitent une formation mathématique de haut niveau, on peut prévoir que de nombreuses créations d'emplois vont continuer à proposer des débouchés de plus en plus variés pour des étudiants possédant de sérieuses compétences en mathématiques. Préparer l'avenir, c'est donc en premier lieu garantir la qualité de l'enseignement dispensé aux jeunes.

Cet avenir est l'un des sujets de réflexion et d'inquiétude constants de la SMF qui s'est déjà engagée à différents niveaux. Elle intervient entre autres dans la conception des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire et participe de manière active à la commission Kahane.

S'appuyant sur les constats de sa commission de l'enseignement, la SMF a souhaité aller plus loin et en premier lieu, organiser une manifestation très ouverte en concertation avec la SMAI, associant des scientifiques d'autres disciplines.

Dans le même temps, J-P. Demailly a diffusé un rapport (disponible sur le serveur de la SMF <sup>1</sup> qui a encore contribué à sensibiliser beaucoup de collègues.

En octobre 2001, le conseil de la SMF a donc prévu l'organisation, en collaboration avec la SMAI, d'une table ronde qui se tiendra le samedi 12 janvier après-midi, sur le thème *mathématiques et enseignement des sciences*, et à laquelle sont invités Antoine d'Autume, Jean-Pierre Demailly, Pierre-Henri Gouyon, Jean-Pierre Kahane, Gilles Kahn, Patrick Le Tallec, et Jacques Treiner. Il y sera entre autres débattu de la place de la modélisation de l'algorithmique et du calcul numérique. Le programme est disponible sur le serveur de la smf <sup>2</sup>.

Parmi les documents de travail, le compte-rendu de la séance qui s'est tenue le 22 Mai 2000 à l'Académie des Sciences sur *l'enseignement des mathématiques en liaison avec les autres disciplines* (paru dans les *Discours et Notices biographiques* de l'Académie des Sciences, tome III (2000), 83-93) sera distribué aux participants.

Ce premier pas, qui devrait préfigurer d'autres actions dans ce domaine, est lié à une inquiétude grandissante devant les problèmes de formation des scientifiques dont certaines solutions incombent principalement à la communauté mathématique.

*Michel Waldschmidt*

---

<sup>1</sup> <http://smf.emath.fr/Enseignements/TribuneLibre>

<sup>2</sup> <http://smf.emath.fr/Enseignements/CommissionSMF/Debatjanvier2002.html>

## Vie de la société

Les internautes auront remarqué que le serveur de la SMF avait subi une cure de rajeunissement. Vos remarques constructives permettront encore de l'améliorer.

La SMF et la SMAI préparent actuellement deux grands colloques internationaux : le premier, avec la Société Mathématique Européenne, aura lieu à Nice en février 2003 ; le suivant, en collaboration avec la Société Mathématique Canadienne et la Société de Mathématiques Appliquées du Canada, est prévu en été 2004 à Toulouse.

La SMF contribue à l'élaboration d'un annuaire des mathématiciens français. Les informations sur ce sujet ont été envoyées aux adhérents en même temps que les bulletins de réadhésion.

La SMF est aussi un des partenaires de l'opération de numérisation des publications mathématiques (NUMDAM) pilotée par la cellule MathDoc. La SMF a patronné un colloque à l'Imperial College (Londres) le samedi 1 décembre 2001 : "Olinde Rodrigues and his circle : Mathematicians and social utopias".

★ ★ ★

## Éditorial

---

*Le comité de rédaction présente ses vœux aux lecteurs de la Gazette et les remercie pour leur fidélité.*

— *Gérard Besson*

# MATHÉMATIQUES

---

## Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ?

P. Biane

---

Ce texte est tiré d'un article de D. Bayer et P. Diaconis "Trailing the dovetail shuffle to its lair" *Ann. Appl. Prob.*, **2** (1992), no. 2., p. 294–313.

Je remercie T. Chomette pour sa lecture attentive du texte.

### 1. Introduction

La méthode la plus utilisée pour battre un paquet de cartes consiste à couper le paquet en deux, puis à mélanger les deux parties en alternant les cartes. J'appellerai ces deux opérations *la coupe* et *le mélange*.

Lorsqu'on suit la méthode rigoureusement, on coupe le paquet en deux parties égales et on alterne exactement les cartes de chaque partie. Si on fait ça avec un paquet de 32 cartes, en prenant soin de laisser toujours la première carte sur le dessus du paquet, on s'aperçoit qu'au bout de 5 battages de cartes, on est revenu dans la position initiale. La règle générale est que la carte en position  $k$  arrive en position  $2k - 1$  si  $k \leq 16$  et en position  $2k - 32$  si  $k \geq 17$ . Par exemple voici les positions successives de la sixième carte : 6, 11, 21, 10, 19, 6. On est bien revenu en position initiale en 5 coups.

Plus généralement, avec un jeu de  $2^n$  cartes, cette méthode permet de revenir dans la position initiale en  $n$  battages.

Exercice : démontrer ce résultat ! (Je donne une solution à la fin du texte).

Ce fait est à la base d'un tour de cartes spectaculaire, où le magicien retrouve une carte dans un paquet que tout le monde croit bien mélangé. Évidemment, pour arriver à couper un paquet *exactement* au milieu puis à le « mélanger » parfaitement et cela 5 fois de suite, il faut une dextérité hors du commun, et bien peu de personnes au monde sont capable d'exécuter ce tour.

En général, quand on bat un paquet, après la coupe les deux parties ne sont qu'approximativement égales et lors du mélange les deux paquets n'alternent pas exactement. Heureusement d'ailleurs, car le but de l'opération est que l'on ne puisse pas deviner la position des cartes une fois le paquet battu, même si on la connaissait avant. Cela nous amène à la question principale de l'exposé : combien de fois doit on battre le paquet pour qu'il soit bien mélangé ? L'intérêt de la question est évident, au moins pour les joueurs de cartes ou les patrons de casinos. En effet, si l'on ne bat pas assez les cartes, il reste dans le jeu un peu d'information provenant de la distribution précédente, que certains joueurs pourraient exploiter pour deviner les cartes, comme par exemple dans le tour de magie qui est expliqué plus bas. Évidemment, plus on bat les cartes et plus on lutte contre cet effet, mais d'un autre côté, si l'on bat les cartes pendant trop longtemps, cela ralentit le jeu (et donc diminue les gains du casino !), il est par conséquent utile de savoir à partir de combien de battages le jeu est suffisamment mélangé.

Pour répondre à cette question il faut disposer d'un modèle mathématique qui décrive la façon dont on bat les cartes, puis arriver à en faire une analyse assez précise.

Le modèle dont il sera question ici a été proposé par les mathématiciens Gilbert et Shannon en 1955, et indépendamment par Reeds en 1981, et il a été testé par P. Diaconis qui a vérifié qu'il décrivait de façon réaliste le battage des cartes pratiqué par exemple dans les casinos.

## 2. Modèle probabiliste

### 2.1 La coupe

On dispose d'un paquet de  $n$  cartes, que l'on commence par couper en deux paquets de  $j$  et  $n - j$  cartes, le nombre  $j$  étant choisi entre 0 et  $n$ , avec la loi *binomiale* c'est-à-dire que l'on a une probabilité  $\frac{1}{2^n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$  que  $j$  soit égal à  $k$ .

La formule du binôme nous dit que  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = 1$  donc la somme des probabilités fait bien 1. Si on trace le graphe de cette probabilité en fonction de  $k$ , on observe une courbe "en cloche", dont le maximum se situe en  $n/2$ , et dont la plus grande partie se trouve concentrée entre  $n/2 - \sqrt{n}$  et  $n/2 + \sqrt{n}$ .

Cela modélise de façon raisonnable ce que peut faire un batteur de carte d'une adresse moyenne en essayant de couper le paquet en deux parties égales. Une autre raison de choisir cette distribution est la suivante : si on choisit une partie de  $\{1, \dots, n\}$  au hasard, toutes les parties étant équiprobables, alors la probabilité de tirer une partie à  $k$  éléments est  $\frac{1}{2^n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Je donnerai plus bas encore une autre justification pour le choix de cette distribution.

### 2.2 Le mélange

Ensuite, une fois que le paquet a été coupé, on mélange les deux parties de la façon suivante : supposons qu'il reste  $a_1$  cartes dans le premier paquet et  $a_2$  dans le second, alors on choisit la carte du dessous du premier paquet avec probabilité  $\frac{a_1}{a_1 + a_2}$ , ou bien celle du second avec probabilité  $\frac{a_2}{a_1 + a_2}$ , et on continue ainsi, avec  $a_1 - 1$  cartes dans le premier et  $a_2$  dans le second, ou bien  $a_1$  dans le premier et  $a_2 - 1$  dans le second suivant les cas, jusqu'à épuisement des deux paquets. Là encore ce choix semble raisonnable, car plus l'un des paquets est gros par rapport à l'autre, plus on a de chance de choisir la carte de ce paquet.

### 2.3 Battages et permutations

On peut interpréter un battage de cartes comme une *permutation* du jeu de cartes. Dans la suite j'appellerai les cartes par des numéros  $1, 2, 3, \dots, n$ , plutôt que par leurs valeurs faciales habituelles, avec trèfle, pique, etc..., car cela rend les arguments plus aisés à suivre, mais cela ne change rien à la nature des choses. Une permutation peut se représenter sous la forme (ici avec  $n = 10$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

La première ligne représente l'ordre des cartes avant le battage, et la seconde ligne l'ordre après battage. Pour un jeu de  $n$  cartes, il y a  $n!$  permutations possibles. Pour un jeu de 52 cartes, on a ainsi 52! possibilités, soit :