Raconte-moi... la droite de Berkovich

• J. Poineau

On appelle corps valué un corps muni d'une valeur absolue. Les exemples les plus connus sont sans doute $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des valeurs absolues usuelles, mais il en existe beaucoup d'autres. Ces deux corps satisfont à une propriété supplémentaire, dite *propriété d'Archimède* :

$$\text{pour tous } y > x > 0, \text{ il existe un entier } n \text{ tel que } |nx| > |y|.$$

On peut montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont les seuls corps valués archimédiens à être complets.

Dans le cas d'un corps valué $(k, |\cdot|)$ qui n'est pas archimédien, la valeur absolue satisfait à une version renforcée de l'*inégalité triangulaire*, dite *ultramétrique* :

$$\forall f, g \in k,\ |f+g| \leqslant \max(|f|, |g|).$$

Comme exemple de tel corps, on peut citer le corps $\mathbb{C}((t))$ des séries de Laurent complexes, c'est-à-dire des séries de la forme

$$f(t) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n t^n,$$

où n_0 est un entier relatif qui dépend de f. Si la série f n'est pas nulle, il existe un plus grand entier n_0, appelé valuation de f, pour lequel la série peut s'écrire sous la forme précédente. On le note $v(f)$. On peut alors définir une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}((t))$ par $|0| = 0$ et

$$|f| = 2^{-v(f)} \text{ pour } f \neq 0.^{1}$$

Un autre exemple classique est celui de la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ sur $\mathbb{Q}$, où p est un nombre premier. Tout nombre rationnel a non nul peut s'écrire de façon unique sous la forme $\pm p^n \frac{u}{v}$, où n est un entier relatif et u et v des entiers naturels non divisibles par p premiers entre eux. L'entier n est appelé valuation p-adique de a et noté $v_p(a)$. On peut alors définir une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|_p$ sur $\mathbb{Q}$ par $|0| = 0$ et

$$|a|_p = p^{-v_p(a)} \text{ pour } a \neq 0.^{2}$$

Nous noterons $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue.

Précisons qu'un théorème d'Alexander Ostrowski assure que toute valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est soit la valeur absolue usuelle, soit la valeur absolue p-adique pour un certain nombre premier p (à normalisation près). Pour étudier un problème donné sur $\mathbb{Q}$, comme l'existence d'une solution d'une équation, on perd certainement beaucoup d'information en passant à un complété fixé, par exemple $\mathbb{R}$, mais on peut espérer mieux le comprendre si l'on est capable de le traiter sur *tous* les complétés.

En guise de motivation pour l'étude des espaces définis sur les corps ultramétriques, ajoutons quelques mots sur un problème classique, dit *problème inverse de Galois* : tout groupe fini G est-il groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}$? Le théorème d'irréductibilité de Hilbert assure qu'il suffit de réaliser G comme groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}(T)$. Dans la lignée des idées exposées plus haut, il est naturel de se demander tout d'abord si une telle construction est possible pour $\mathbb{R}(T)$, ou même $\mathbb{C}(T)$, et les différents $\mathbb{Q}_p(T)$.

Commençons par le cas complexe. Le corps $\mathbb{C}(T)$ étant le corps des fonctions méromorphes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la question admet une traduction géométrique en termes de construction de revêtements, éventuellement ramifiés, de cet espace. Si l'on comprend bien la relation entre revêtements algébriques, analytiques et topologiques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé d'un nombre fini de points, ce qui est le cas, on se ramène à un problème purement topologique. La description du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé d'un nombre fini de points comme un groupe libre permet alors d'ap-

1. La constante 2 est choisie arbitrairement et pourrait être remplacée par n'importe quel nombre réel strictement supérieur à 1.
2. Ici aussi, la constante p que l'on élève à la puissance $v_p(a)$ peut être modifiée. Ce choix particulier est cependant intéressant en ce qu'il conduit à la *formule du produit* : pour tout nombre rationnel non nul a, on a $|a|\prod_p |a|_p = 1$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

porter une réponse positive au problème inverse de Galois sur $\mathbb{C}(T)$, car tout groupe fini est quotient d'un groupe libre possédant suffisamment de générateurs.

Pour mettre en œuvre des arguments similaires sur $\mathbb{Q}_p$, il faut disposer d'espaces possédant de bonnes propriétés, proches de celles des espaces complexes. Nous expliquons dans la suite de ce texte les problèmes qui se posent et les solutions que l'on peut y apporter.

Nous ne nous attarderons pas davantage sur le problème inverse de Galois, mais souhaitons tout de même signaler que David Harbater a démontré dans [4] que l'on pouvait en effet le résoudre sur $\mathbb{Q}_p$. Le problème original reste cependant ouvert.

1. Topologie sur un corps ultramétrique

Les espaces classiques tels que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ jouissent de bonnes propriétés topologiques : compacité locale, connexité par arcs locale, contractibilité locale, etc. qui tombent en défaut dans le cadre ultramétrique.

Afin d'apporter des précisions, fixons un corps valué ultramétrique complet $(k,|\cdot|)$. Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $a \in k$, notons $B(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Un calcul direct montre que, pour tout point b de $B(a,r)$, nous avons $B(a,r) = B(b,r)$. En d'autres termes, tout point appartenant à la boule est centre de cette boule. On en déduit que les boules fermées de rayon strictement positif sont ouvertes. Cette propriété pose inévitablement des problèmes de connexité et l'on démontre précisément que les composantes connexes de k sont les points : l'espace est dit *totalement discontinu*.

D'autres pathologies peuvent se présenter. On vérifie, par exemple, que, lorsque $k = \mathbb{C}((t))$, nous avons

$$B(0,1) = \mathbb{C}[[t]] = \bigsqcup_{a\in\mathbb{C}} B(a,1)^\circ,$$

où $B(a,1)^\circ$ désigne la boule unité ouverte centrée en a. Il s'ensuit que $B(0,1)$ n'est pas compacte et, par des arguments du même type, que k n'est pas localement compact.

Il y a une vingtaine d'années, Vladimir G. Berkovich a développé dans [2] une théorie permettant de définir des espaces sur les corps ultramétriques dont les propriétés sont proches de celles des espaces réels et complexes. Ses espaces contiennent beaucoup d'autres points que ceux de k, dont un point appartenant à la boule fermée $B(0,1)$ mais à aucune boule ouverte de rayon 1 (rendant caducs les arguments de topologie qui précèdent). Précisons que la théorie de V. Berkovich est en réalité bien plus complète, puisqu'elle permet de définir une géométrie analytique ultramétrique (et prolonge en cela les travaux fondateurs de John Tate des années soixante), mais nous n'aborderons pas ce point.

2. La droite de Berkovich

Soit $(k,|\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet.

2.1 – Définition

Ensemblistement, la droite affine au sens de Berkovich, notée $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[T]$ qui induisent la valeur absolue donnée $|\cdot|$ sur k. On la munit de la topologie faible (autrement dit de la topologie la plus grossière rendant continue l'évaluation des polynômes). Montrons tout de suite qu'un point « classique », c'est-à-dire correspondant à un élément α de k, donne naturellement lieu à un point au sens de Berkovich : il suffit pour cela de considérer la semi-norme multiplicative

$$P(T) \in k[T] \mapsto |P(\alpha)| \in \mathbb{R}_+.$$

Dans la suite du texte, nous noterons encore α ce point.

Il est possible de généraliser la construction précédente en considérant non plus seulement des éléments de k, mais aussi d'un corps valué complet arbitraire K contenant k et dont la valeur absolue étend celle de k. Tout point de la droite de Berkovich peut d'ailleurs s'obtenir de la sorte.

Nous disposons donc de deux définitions de la droite de Berkovich. Si la première, en termes de semi-normes multiplicatives, est plus concrète et permet de parvenir à une description explicite de la droite, la seconde, en termes de points à valeurs dans des corps valués, peut sembler plus naturelle et présente en outre un intérêt théorique certain. Elle doit rappeler la construction classique de Gelfand du spectre d'une algèbre de Banach complexe à partir des caractères de cette algèbre. Il est remarquable que les propriétés connues de ce spectre restent valables ici : l'espace $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est séparé et loca-