

**Wendelin Werner**  
**Ellen Powell**

---

**LECTURE NOTES ON  
THE GAUSSIAN FREE FIELD**

---

**COURS SPÉCIALISÉS 28**

---

## COURS SPÉCIALISÉS 28

### Comité de rédaction

Raphaël CÔTE	Olivier GUICHARD
Cyril DEMARCHE	Thierry LÉVY
Romain DUJARDIN	Bertrand MAURY
Sophie GRIVAUX	Alain VALETTE

Julie DÉSSERTI (rédactrice en chef)

### Diffusion

Maison de la SMF	Amer. Math. Soc.
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:commandes@smf.emath.fr">commandes@smf.emath.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

### Tarifs 2021

Vente au numéro : 43 € (hors Europe \$ 65)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### Cours Spécialisés

Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré  
11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99      Fax : (33) 01 40 46 90 96  
[cours\\_specialise@smf.emath.fr](mailto:cours_specialise@smf.emath.fr)      <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2021

*Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-952-4

Directeur de la publication : Fabien DURAND

---

**COURS SPÉCIALISÉS 28**

**LECTURE NOTES ON  
THE GAUSSIAN FREE FIELD**

**Wendelin Werner  
Ellen Powell**

**Société Mathématique de France 2021**

*W. Werner*

ETH Zürich, D-Math

Ramistr. 101, 8092 Zürich, Switzerland.

*E-mail* : wendelin.werner@math.ethz.ch

*E. Powell*

Durham University, Department of Mathematics,

Upper Mountjoy, Stockton Road, Durham, DH13LE, United Kingdom.

*E-mail* : ellen.g.powell@durham.ac.uk

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** — 60G60, 60G15, 60J67, 82B20, 82B21.

**Key words and phrases.** — Gaussian free field, local sets, Markov properties, loop-soups, Brownian loop-soups, Schramm–Loewner Evolution.

**Mots clefs.** — Champ libre gaussien, ensembles locaux, propriété de Markov, soupes de lacets, processus SLE.

---

The authors acknowledge the support of the Grant 175505 of the Swiss National Science Foundation. EP also thanks the FIM of ETH Zürich, for support during visits in 2019-2020.

# LECTURE NOTES ON THE GAUSSIAN FREE FIELD

Wendelin Werner, Ellen Powell

**Abstract.** — The Gaussian Free Field (GFF) in the continuum appears to be the natural generalisation of Brownian motion, when one replaces time by a multidimensional continuous parameter. While Brownian motion can be viewed as the most natural random real-valued function defined on  $\mathbb{R}_+$  with  $B(0) = 0$ , the GFF in a domain  $D$  of  $\mathbb{R}^d$  for  $d \geq 2$  is a natural random real-valued generalised function defined on  $D$  with zero boundary conditions on  $\partial D$ . In particular, it is not a random continuous function.

The goal of these lecture notes is to describe some aspects of the continuum GFF and of its discrete counterpart defined on lattices, with the aim of providing a gentle self-contained introduction to some recent developments on this topic, such as the relation between the continuum GFF, Brownian loop-soups and the Conformal Loop Ensembles  $CLE_4$ .

This is an updated and expanded version of the notes written by the first author (WW) for graduate courses at ETH Zürich (Swiss Federal Institute of Technology in Zürich) in 2014 and 2018. It has benefited from the comments and corrections of students, as well as of a referee; we thank them all very much. The exercises that are interspersed in the first half of these notes mostly originate from the exercise sheets prepared by the second author (EP) for this course in 2018.

**Résumé (Notes de cours sur le champ libre gaussien).** — Le champ libre gaussien dans le continu est la généralisation naturelle du mouvement brownien, lorsque l'on remplace l'axe temporel par un ensemble multidimensionnel. Tandis que le mouvement brownien peut être considéré comme étant la fonction aléatoire réelle continue telle que  $B(0) = 0$  la plus naturelle, le champ libre défini sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^d$  est une fonction généralisée (au sens des distributions) réelle aléatoire naturelle  $\Gamma$  définie sur  $D$  telle que  $\Gamma = 0$  sur  $\partial D$ . En particulier, ce n'est pas une fonction continue aléatoire.

Le but de ces notes de cours est de décrire divers aspects du champ libre gaussien dans le continu, ainsi que de ses analogues discrets définis sur des réseaux, afin de donner une introduction autonome à des développements récents sur ces thèmes, comme la relation entre le champ libre gaussien, les soupes de lacets browniens et (en dimension deux) les ensembles conformes de boucles  $CLE_4$ .

Ces notes sont une version complétée des notes de cours rédigées par le premier auteur (WW) pour des cours avancés à l'ETH de Zürich (École polytechnique fédérale de Zurich) en 2014 et 2018. Elles ont ainsi bénéficié des commentaires et corrections d'étudiants, ainsi que d'un rapporteur anonyme que nous remercions. Les exercices qui figurent dans la première partie du cours correspondent à des feuilles d'exercices préparées par le second auteur (EP) pour ce cours en 2018.



## CONTENTS

<b>Overview</b> .....	1
<b>0. Warm-up</b> .....	5
0.1. Conditioned random walks .....	5
0.2. Concrete examples in the discrete square .....	8
<b>1. The discrete GFF</b> .....	13
1.1. Definition .....	13
1.2. Informal comments about the possible scaling limit .....	19
1.3. Variations on the Markov property .....	21
1.4. Determinant of the Laplacian .....	30
1.5. GFF on other graphs .....	32
<b>2. Loop-soups and the discrete GFF</b> .....	37
2.1. Uniform spanning trees and Wilson's algorithm .....	37
2.2. The occupation time fields in Wilson's algorithm .....	42
2.3. Discrete-time loop-soups and their occupation times .....	46
2.4. Continuous-time loop-soups and their occupation times .....	55
2.5. Resampling and Markovian properties of unoriented loop-soups .....	59
2.6. A quick survey of the GFF and loop-soups on cable graphs .....	67
<b>3. The continuum GFF</b> .....	75
3.1. Definition of the continuum GFF .....	76
3.2. A closer look at the continuum Green's function .....	81
3.3. First comments on the regularity of the GFF .....	89
3.4. Relation with Brownian loop-soups (a non-rigorous warm-up) .....	97
<b>4. The Markov property and local sets in the continuum</b> .....	105
4.1. The Markov property .....	105
4.2. Local sets of the continuum GFF .....	109

<b>5. Topography of the continuum Gaussian Free Field</b> .....	125
5.1. Warm-up and overview .....	125
5.2. Deterministic Loewner chains background .....	128
5.3. $SLE_4$ , harmonic measure martingales and coupling with the GFF .....	130
5.4. $SLE_4$ is a deterministic function of the GFF .....	135
5.5. Variants of this coupling result .....	138
5.6. $CLE_4$ and the GFF .....	141
5.7. Constructing a GFF as a nested $CLE_4$ .....	144
5.8. Brownian loop-soup and $CLE_4$ — the three couplings are the same .....	145
5.9. Some related couplings .....	146
<b>6. Quick review of further related results</b> .....	149
6.1. Liouville quantum gravity .....	149
6.2. GFF with Neumann boundary conditions and on compact surfaces .....	154
6.3. Quantum zipper and LQG .....	158
6.4. The scaling limit of Wilson’s algorithm in 2D .....	161
<b>Bibliography</b> .....	167