ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 49 fascicule 1 janvier-février 2016

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Dominique CERVEAU & Alcides LINS NETO & Marianna RAVARA-VAGO

Feuilletages holomorphes de codimension 1 : une étude locale dans le cas dicritique

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Europe : 515 €. Hors Europe : 545 €. Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Marc Peigné
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 49, 2016, p. 213 à 247

FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1: UNE ÉTUDE LOCALE DANS LE CAS DICRITIQUE

PAR DOMINIQUE CERVEAU, ALCIDES LINS NETO
ET MARIANNA RAVARA-VAGO

RÉSUMÉ. – Nous décrivons les singularités de feuilletages holomorphes *dicritiques* de petite multiplicité en dimension 3. En particulier nous relions l'existence de déformations et de déploiements non triviaux à des problèmes d'intégrabilité liouvillienne.

ABSTRACT. – We describe the singularities of *dicritical* holomorphic foliations of small multiplicity in dimension 3. In particular we connect the existence of non trivial deformations and deployments to problems of Liouvillian integrability.

1. Introduction

On se propose dans cet article de donner la description de certains germes de feuilletages holomorphes de codimension un à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Un tel feuilletage $\mathcal{F}$ est associé à la donnée d'une 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$, définie à unité multiplicative près, satisfaisant la condition d'intégrabilité de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ et dont le lieu singulier $\operatorname{Sing}\omega = \text{Zéros}(\omega)$ est de codimension supérieure ou égale à deux. On note $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$ et $\operatorname{Sing}\mathcal{F} = \operatorname{Sing}\omega$. La condition d'intégrabilité est non linéaire en les coefficients de ω, ce qui rend difficile la construction d'exemples par des procédés calculatoires. Il y a essentiellement deux manières simples pour construire de tels exemples. La première consiste à se donner un germe $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ en dimension 2 (dans ce cas la condition d'intégrabilité est triviale), une application holomorphe $F : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ dominante et à considérer $\omega = F^*\omega_0$ qui est automatiquement intégrable ; les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ sont alors fibrées par les niveaux de F. Un tel feuilletage sera dit de type *pull-back* ; on peut d'ailleurs généraliser cette procédure en considérant un feuilletage $\mathcal{F}_0$ d'une surface S_0, éventuellement singulière, et une application méromorphe $F : \mathbb{C}^n \dashrightarrow S_0$ (typiquement la projection naturelle $\mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$) et en « rappelant » $\mathcal{F}_0$ par F. L'autre manière est de considérer les feuilletages $\mathcal{F}_\theta$ associés aux 1-formes méromorphes θ fermées : $d\theta = 0$. Comme nous le rappellerons une telle forme s'écrit :

$$\theta = \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + dh$$

où les f_i sont holomorphes, h méromorphe et les *résidus* λ_i des nombres complexes. Essentiellement les feuilles de $\mathcal{F}_\theta$ sont les niveaux de la fonction multivaluée $\sum \lambda_i \log f_i + h$. Ceci n'est pas sans rappeler la conjecture, concernant cette fois les feuilletages globaux, suivante :

CONJECTURE (Brunella, Lins Neto *et al.* [10]). – Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension un sur une variété projective X. Alors ou bien $\mathcal{F}$ est transversalement projectif (sur un ouvert de Zariski) ou bien il existe $F : X \dashrightarrow S$ une application rationnelle vers une surface S et un feuilletage $\mathcal{G}$ de S tels que $\mathcal{F} = F^*\mathcal{G}$.

Pour éclairer cette conjecture disons que parmi les feuilletages transversalement projectifs il y a les feuilletages donnés par une 1-forme fermée méromorphe ou les feuilletages transverses à une fibration rationnelle (sur un ouvert de Zariski fibré). Ils sont donnés par une 1-forme rationnelle ω_0 pour laquelle existent deux autres 1-formes rationnelles ω_1, ω_2 formant un $SL(2,\mathbb{C})$ triplet [10, 20] :

$$d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1, \quad d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ un germe de 1-forme intégrable, $\omega = \sum a_i dz_i$; si l'ensemble singulier $\mathrm{Sing}\,\omega := \{a_1 = \cdots = a_n = 0\}$ est suffisamment petit, $\mathrm{Cod\,Sing}\,\omega \geq 3$, le théorème de Frobenius de B. Malgrange assure l'existence d'une intégrale première non constante $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0) : \omega = gdf$, $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$; ici les feuilles sont les niveaux de f. On pourrait penser que cela décrit la situation générique (pour la topologie de Krull), mais il n'en est rien : on sait en effet depuis Kupka et Reeb [17] que la condition $d\omega(0) \neq 0$ implique que le lieu singulier est lisse de codimension deux et cette propriété est stable. Nous précisons dans le texte ce phénomène bien connu et nous présentons la classification des 1-formes intégrables dont le 1-jet est non trivial suivant les travaux de [12, 17, 19]. Une grande partie du travail que nous proposons repose sur l'idée naïve suivante ; si l'on procède au développement de Taylor de ω :

$$\omega = \omega_\nu + \omega_{\nu+1} + \cdots + \omega_k + \cdots$$

où chaque ω_k est une 1-forme homogène de degré k, i.e. à coefficients polynômes homogènes de degré k, et ω_ν est la *partie homogène de plus bas degré non nulle*, alors la partie initiale $\mathrm{In}(\omega) = \omega_\nu$ de ω est intégrable. Mieux, il y a une homotopie de 1-formes intégrables

$$\omega_t = \omega_\nu + t\omega_{\nu+1} + \cdots + t^k \omega_{\nu+k} + \cdots, \quad t \in \mathbb{C}$$

reliant $\omega = \omega_{t=1}$ à sa partie initiale $\omega_{t=0} = \mathrm{In}(\omega)$. On peut donc espérer, modulo des conditions raisonnables sur ω_ν, que la 1-forme ω, que l'on voit donc comme une déformation de ω_ν, va conserver certaines propriétés de sa partie initiale $\mathrm{In}(\omega)$. Pour présenter nos résultats nous avons besoin de quelques notations et rappels. On désigne par R le champ *radial*, $R = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Une 1-forme homogène intégrable ω_ν est dite *dicritique* si le polynôme $P_{\nu+1} = i_R \omega_\nu$ est identiquement nul ; elle est *non dicritique* sinon. Une forme dicritique induit un feuilletage sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, tandis que le feuilletage homogène associé à une forme non dicritique est défini par une 1-forme fermée rationnelle : en effet $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$ est fermée. Modulo des conditions génériques portant sur ω_ν, ces propriétés sont gardées en mémoire par les ω telles que $\mathrm{In}(\omega) = \omega_\nu$. Ainsi, dans le cas non dicritique, si $[P_{\nu+1} = 0] \subset \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ est réduit et à croisement normaux, alors $\mathcal{F}_\omega$ est encore défini par une 1-forme fermée méromorphe dès que les résidus λ_i de $\omega_\nu = \mathrm{In}(\omega)$ satisfont une condition générique (satisfaite sur un ouvert dense) ; de même si $[P_{\nu+1} = 0]$ est irréductible de degré p^s, avec p premier et $n \geq 3$ [11] : en fait dans ce cas ω possède une intégrale première holomorphe non constante.

Dans le cas dicritique et en dimension 3, on démontre dans [1] que si $d\omega_\nu = d(\mathrm{In}(\omega))$ est à singularité isolée et $\nu \geq 3$, alors les feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_\nu}$ et $\mathcal{F}_\omega$ sont holomorphiquement conjugués, ce que l'on peut interpréter comme un résultat de *détermination finie* ou de stabilité (pour la topologie de Krull).

Nous nous intéressons dans cet article à des feuilletages $\mathcal{F}_\omega$ dont la partie homogène $\omega_\nu = \mathrm{In}(\omega)$ ne satisfait plus les conditions précédentes. Si ω_ν est une 1-forme homogène intégrable dicritique, on note $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ le feuilletage de $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ associé ; si Cod Sing $\omega_\nu \geq 2$, c'est un feuilletage de degré $\nu-1$. Rappelons qu'un point *central* (ou une singularité de *type centre*) pour un feuilletage $\mathcal{G}$ du plan est un point singulier m en lequel $\mathcal{G}$ possède une intégrale première de Morse ; toujours en dimension 2, un point singulier m est dit *nilpotent* si $\mathcal{G}_{,m}$ est défini par un germe de 1-forme dont la partie initiale est de type xdx. Le point singulier m est dit *d'ordre* ≥ 2 si $\mathcal{G}_{,m}$ est défini par une 1-forme à 1-jet nul.

Les résultats qui suivent sont propres à la dimension 3, première dimension où la condition d'intégrabilité est non triviale.

THÉORÈME PRINCIPAL. – *Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3, 0)$ holomorphe intégrable. On suppose que la partie initiale* $\mathrm{In}(\omega) = \omega_\nu$ *est dicritique et satisfait* Cod Sing $\omega_\nu \geq 2$. *Alors :*

1. *Si $\nu = 1$, $\mathcal{F}_\omega$ est holomorphiquement conjugué à $\mathcal{F}_{\omega_1}$, $\omega_1 = z_2dz_1 - z_1dz_2$; en particulier $\mathcal{F}_\omega$ possède une intégrale première méromorphe $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ (Z_i coordonnées).*
2. *Si $\nu = 2$, $\mathcal{F}_\omega$ est donné par une 1-forme fermée méromorphe.*
3. *Si $\nu \geq 3$ et $[\mathcal{F}_{\omega_\nu}]$ n'a ni singularité nilpotente, ni centre, ni singularité d'ordre ≥ 2, alors $\mathcal{F}_\omega$ est conjugué à $\mathcal{F}_{\omega_\nu}$.*
4. *Si $\nu = 3$ et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ a une singularité de type centre, alors $\mathcal{F}_\omega$ est défini par une 1-forme fermée méromorphe.*
5. *Si $\nu = 3$ et $[\mathcal{F}_{\omega_3}]$ a une singularité nilpotente alors, modulo une condition de non-résonnance portant sur ω_3, $\mathcal{F}_\omega$ est défini par une 1-forme fermée méromorphe ou bien $\mathcal{F}_\omega$ est conjugué à $\mathcal{F}_{\omega_3}$.*
6. *Si $\nu = 3$ et $\mathcal{F}_{\omega_3}$ a une singularité d'ordre ≥ 2, alors $\mathcal{F}_\omega$ est transversalement affine, i.e. $d\omega = \omega \wedge \omega_1$, avec ω_1 méromorphe fermée.*

Dans le théorème principal, nous avons rassemblé divers énoncés qui apparaissent dans le texte. Par souci de cohérence nous avons inséré dans le théorème des résultats bien connus : c'est le cas des points 1 et 2. Le point 3 contient le résultat de Camacho-Lins Neto [1]. Le point 4 fait intervenir un résultat d'intégration liouvillienne remarquable démontré en 1908 par Henri Dulac [14]. Le point 5 nécessite une étude fine des déploiements des feuilletages du plan à singularité nilpotente. Cette étude est rendue possible par l'utilisation du Théorème de Préparation de F. Loray [19]. À titre d'exemple, on démontre que si $\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ est à singularité nilpotente et à nombre de Milnor $\mu(\omega_0; 0)$ de type $p-1$ avec p premier, alors tout déploiement $\mathcal{F}_\omega$ de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ à singularité nilpotente $(\mathrm{In}(\omega) = \mathrm{In}(\omega_0))$ est trivial ou bien