ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 49 fascicule 2 mars-avril 2016

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE & Alena PIRUTKA

Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non-rationalité stable

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Europe : 515 €. Hors Europe : 545 €. Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Marc Peigné
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 49, 2016, p. 371 à 397

HYPERSURFACES QUARTIQUES DE DIMENSION 3 : NON-RATIONALITÉ STABLE

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET ALENA PIRUTKA

RÉSUMÉ. – Inspirés par un argument de C. Voisin, nous montrons l'existence d'hypersurfaces quartiques lisses de dimension 3 sur les complexes qui ne sont pas stablement rationnelles, plus précisément dont le groupe de Chow de degré zéro n'est pas universellement égal à $\mathbb{Z}$. La méthode de spécialisation adoptée ici permet de construire des exemples définis sur un corps de nombres.

ABSTRACT. – There are (many) smooth quartic threefolds over the complex field which are not stably rational. More precisely, their degree zero Chow group is not universally equal to $\mathbb{Z}$. The proof uses a variation of a method due to C. Voisin. The specialisation argument we use yields examples defined over a number field.

Introduction

Soit $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ une hypersurface quartique lisse. Dans [15], Iskovskikh et Manin montrent que tout automorphisme birationnel de X est un automorphisme, ce qui implique que le groupe des automorphismes birationnels est fini et que la variété de Fano X n'est pas rationnelle. Des choix convenables de X donnent alors des contre-exemples au théorème de Lüroth pour les solides.

Cette méthode, dite de rigidité birationnelle, a depuis été fort développée. Elle ne permet pas de répondre à la question de la rationalité stable de ces variétés, que l'on trouve posée explicitement dans [14].

Artin et Mumford [1] construisirent d'autres exemples de solides $X/\mathbb{C}$ projectifs et lisses qui sont unirationnels mais non rationnels. L'invariant qu'ils utilisèrent est le sous-groupe de torsion $H^3(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ du troisième groupe de cohomologie de Betti, isomorphe pour un solide projectif et lisse au groupe $H^4(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$. Pour toute variété $X/\mathbb{C}$ projective et lisse rationnellement connexe, le groupe $H^3(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ est isomorphe à un autre invariant birationnel, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$. Ce groupe est nul pour toute variété $X/\mathbb{C}$ stablement rationnelle, et même pour toute variété rétracte rationnelle. Leurs exemples ne sont donc pas stablement rationnels. La méthode ne peut s'appliquer directement aux variétés intersections complètes lisses de dimension au moins 3 dans un espace projectif $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, car le groupe de Brauer de telles variétés est nul.

Dans un récent article [25], C. Voisin a montré qu'un solide lisse revêtement double de $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ ramifié le long d'une surface quartique lisse très générale n'est pas stablement rationnel. Elle utilise une famille propre $f : X \to B$ de variétés, de base une courbe B lisse, d'espace total une variété lisse X, dont une fibre spéciale Y est un solide d'Artin-Mumford, de désingularisation $Z \to Y$. Utilisant le fait que le solide Y n'a que des singularités quadratiques ordinaires, par un argument de spécialisation, elle montre que si une fibre très générale de f admettait une décomposition de Chow de la diagonale, alors il en serait de même pour la variété lisse Z. Ceci impliquerait que la torsion du groupe $H^3(Z, \mathbb{Z})$, est nulle, ce qui d'après Artin et Mumford n'est pas le cas. Ainsi une fibre très générale de f n'est pas stablement rationnelle.

Dans le présent article, nous montrons qu'une hypersurface quartique très générale dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ n'est pas stablement rationnelle. Pour ce faire, nous relâchons les hypothèses dans la méthode de C. Voisin. D'une part nous autorisons l'espace total X à ne pas être lisse, d'autre part nous relâchons l'hypothèse sur le diviseur exceptionnel d'une résolution des singularités $Z \to Y$. Que l'on puisse un peu relâcher cette dernière hypothèse est déjà mentionné dans [25, remarque 1.2].

Nous donnons deux versions assez différentes de l'argument de spécialisation, l'un purement en termes de groupes de Chow des zéro-cycles (§ 1), l'autre, essentiellement celui de Claire Voisin [25], en termes de correspondances (§ 2). Un point essentiel de notre démonstration utilise l'homomorphisme de spécialisation de Fulton, qui existe sous des hypothèses très larges.

Nous exhibons une hypersurface quartique singulière Y birationnelle à un solide d'Artin-Mumford, dont nous construisons une résolution des singularités $Z \to Y$. Nous avons relégué cette construction à l'appendice A. Nous montrons que le diviseur exceptionnel remplit les conditions suffisantes dégagées aux paragraphes précédents pour faire fonctionner la méthode de spécialisation.

Le résultat de spécialisation de zéro-cycles (§ 1) montre qu'une déformation générique de cette hypersurface quartique Z n'est pas géométriquement stablement rationnelle, ni même rétracte rationnelle.

Le point de vue des correspondances (§ 2) établit la non-rationalité stable pour les hypersurfaces quartiques « très générales » sur le corps des complexes.

Le point de vue « groupe de Chow de zéro-cycles » (§ 1) établit l'existence d'hypersurfaces quartiques non stablement rationnelles définies sur une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(t)$, et montre que les paramètres de telles hypersurfaces sont denses pour la topologie de Zariski sur l'espace projectif paramétrant ces variétés (théorème 1.17). En utilisant des spécialisations sur un corps fini, on peut même, comme nous l'a obligeamment indiqué O. Wittenberg, établir l'existence de telles hypersurfaces définies sur la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ (théorème 1.20).

Un exemple de quartique singulière Y dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ avec une résolution des singularités $Z \to Y$ satisfaisant les deux conditions : la torsion de $H^4(Z, \mathbb{Z})$ est non nulle, et le diviseur exceptionnel E satisfait les conditions suffisantes mentionnées ci-dessus, avait déjà été construit par J. Huh [14]. Pour l'exemple que nous construisons, point n'est besoin de calculer la torsion de $H^4(Z,\mathbb{Z})$: il suffit de renvoyer à l'article d'Artin et Mumford, ou au calcul birationnel du groupe de Brauer de Z [5, exemple 2.5].

Le formalisme du § 1 permet aussi d'établir la non-rationalité stable, sur leur corps de définition, de certaines variétés. Pour k un corps p-adique, ou un corps de nombres, nous montrons ainsi l'existence d'hypersurfaces cubiques lisses de dimension 3 définies sur k et qui ne sont pas stablement k-rationnelles (théorème 1.21).

Soit k un corps. Une k-variété est un k-schéma séparé de type fini. Une k-variété intègre est dite k-rationnelle si elle est k-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Une k-variété intègre X est dite stablement k-rationnelle s'il existe des espaces projectifs $\mathbf{P}^n_k$ et $\mathbf{P}^m_k$ tels que $X \times_k \mathbf{P}^n_k$ est k-birationnel à $\mathbf{P}^m_k$. Une k-variété intègre X est dite rétracte rationnelle s'il existe des ouverts de Zariski non vides $U \subset X$ et $V \subset \mathbf{P}^m_k$ (m convenable), et des k-morphismes $f : U \to V$ et $g : V \to U$ tels que le composé $g \circ f$ est l'identité de U. Une k-variété intègre stablement k-rationnelle est rétracte rationnelle.

Soit X une k-variété projective intègre. On dit qu'un k-morphisme $Z \to X$ est une désingularisation de X si Z est une k-variété projective lisse intègre et le morphisme f est k-birationnel, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme $k(X) \xrightarrow{\sim} k(Z)$.

1. Groupe de Chow des zéro-cycles et spécialisations

Soit k un corps.

Définition 1.1. – On dit qu'un k-morphisme propre $f : X \to Y$ de k-variétés est universellement CH_0-trivial si, pour tout corps F contenant k, l'application induite $f_* : CH_0(X_F) \to CH_0(Y_F)$ sur les groupes de Chow de zéro-cycles est un isomorphisme.

Dans le cas particulier du morphisme structural d'une k-variété, on a la définition suivante.

Définition 1.2. – On dit qu'une k-variété propre X est universellement CH_0-triviale si son groupe de Chow de degré zéro est universellement égal à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si, pour tout corps F contenant k, l'application degré $deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Une telle k-variété X est géométriquement connexe et possède un zéro-cycle de degré 1 sur le corps k.

Exemple 1.3. – Soient $X_i \subset \mathbf{P}^n_k$, $i = 1,2$, deux k-variétés fermées universellement CH_0-triviales. Si $X_1 \cap X_2$ contient un point rationnel ou plus généralement un zéro-cycle de degré 1, alors la k-variété $X := X_1 \cup X_2$ est universellement CH_0-triviale.

Proposition 1.4. – *Soit X une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre de dimension n.*

Soit K le corps des fonctions rationnelles de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *La k-variété X est universellement CH_0-triviale.*

(ii) *La k-variété X possède un zéro-cycle de degré 1, et la flèche $deg_K : CH_0(X_K) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.*