

Alexander Beilinson  
Joseph Bernstein  
Pierre Deligne  
Ofer Gabber

---

**FAISCEAUX PERVERS**

---

ASTÉRISQUE 100

---

Astérisque est une publication de la Société mathématique de France  
Numéro 100

---

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Hélène ESNAULT
Viviane BALADI	Philippe EYSSIDIEUX
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Alexandru OANCEA
Nicolas BURQ	Fabrice PLANCHON
Damien CALAQUE	

Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:christian.munusami@smf.emath.fr">christian.munusami@smf.emath.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

Tarif 2018

*Vente au numéro* : 45 € (\$67)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

[asterisque@smf.emath.fr](mailto:asterisque@smf.emath.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2018

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-878-7

Stéphane SEURET  
Directeur de la publication

---

**ASTÉRISQUE 100**

**FAISCEAUX PERVERS**

**Alexander Beilinson**

**Joseph Bernstein**

**Pierre Deligne**

**Ofer Gabber**

**Société Mathématique de France 2018**

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*A. Beilinson*

Department of Mathematics, University of Chicago, 5734 S. University Avenue,  
Chicago, IL, 60637 USA.

*E-mail* : `sasha@math.uchicago.edu`

*J. Bernstein*

School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978 Israel.

*E-mail* : `bernstei@post.tau.ac.il`

*P. Deligne*

Institute for Advanced Study School of Mathematics, 1 Einstein Drive,  
Princeton, New Jersey 08540 USA.

*E-mail* : `deligne@ias.edu`

*O. Gabber*

IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette France.

*E-mail* : `gabber@ihes.fr`

---

***Classification mathématique par sujets (2010)***

18E30 : Derived categories, triangulated categories ;

19F27 : Étale cohomology ;

32S60 : Stratifications ; constructible sheaves ; intersection cohomology ;

55N33 : Intersection homology and cohomology ;

32S30 : Deformations of singularities ; vanishing cycles.

***Mots clefs.*** — Catégorie triangulée, catégorie dérivée,  $t$ -structure, cœur d'une  $t$ -structure, stratification, faisceau constructible, faisceau  $\ell$ -adique, faisceau pervers, foncteur de prolongement intermédiaire, perversité autoduale, cycles évanescents, théorème de pureté du prolongement intermédiaire, théorème de décomposition, théorème de Lefschetz difficile relatif, poids, complexe pur, complexe mixte.

---

*La Société Mathématique de France remercie la cellule Mathdoc dans le cadre de son programme NUMDAM pour l'aide apportée à cette édition.*

# FAISCEAUX PERVERS

Alexander Beilinson, Joseph Bernstein, Pierre Deligne,  
Ofar Gabber

**Résumé.** — Ce volume présente la théorie des faisceaux pervers. Les définitions et les propriétés de base des  $t$ -structures sur les catégories triangulées sont données dans le premier chapitre. Le second chapitre introduit les faisceaux pervers et le foncteur de prolongement intermédiaire (pour toute perversité), tant dans le cadre des espaces stratifiés que dans celui des schémas. Le troisième chapitre traite de divers sujets complémentaires (catégories dérivées filtrées et foncteur de réalisation, localisation dans la catégorie dérivée des faisceaux). Le quatrième chapitre rassemble des propriétés de base des faisceaux pervers pour la perversité autoduale. Le cinquième chapitre est le cœur de ce livre. Il est consacré à l'étude des faisceaux  $\ell$ -adiques pervers mixtes sur les variétés sur un corps fini ; il contient notamment le théorème de pureté du prolongement intermédiaire, le théorème de décomposition, et le théorème de Lefschetz difficile relatif. Le sixième chapitre explique comment utiliser les résultats du chapitre précédent en géométrie algébrique complexe. La présente édition comprend une liste d'*errata* et d'*addenda*, une bibliographie additionnelle et un appendice sur la  $t$ -exactitude de certains foncteurs utiles.

**Abstract.** — This volume presents the theory of perverse sheaves. Definitions and basic properties of  $t$ -structures on triangulated categories are given in the first chapter. Perverse sheaves and the intermediate extension functor (for any perversity) are introduced, in the settings of stratified spaces and of schemes, in the second chapter. The third chapter treats some complementary material on filtered derived categories and the realization functor, and on localization in the derived category of sheaves. The fourth chapter collects basic facts about perverse sheaves for the middle perversity. The fifth chapter, which is the core of the book, considers mixed perverse  $\ell$ -adic sheaves on varieties over a finite field; it contains, in particular, the theorem about purity of the intermediate extension, the decomposition theorem, and the relative hard Lefschetz theorem. The sixth chapter explains how results of chapter five can be used in complex algebraic geometry. The present edition includes a list of *errata* and *addenda*, an additional bibliography, and an appendix on  $t$ -exactness of some useful functors.



## TABLE DES MATIÈRES

### FAISCEAUX PERVERS

A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne & O. Gabber

<b>Préface à la deuxième édition</b> .....	1
<b>o. Introduction</b> .....	3
<b>1. Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée</b> .....	14
1.1. Catégories triangulées .....	14
1.2. Sous-catégories abéliennes .....	23
1.3. t-catégories .....	25
1.4. Recollement .....	39
<b>2. Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas</b> .....	52
2.1. Espaces stratifiés .....	52
2.2. Schémas .....	62
<b>3. Compléments</b> .....	72
3.1. Catégorie dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes .....	72
3.2. Localisation .....	81
3.3. Cohomologie entière .....	94
<b>4. La perversité auto-duale : propriétés géométriques</b> .....	97
4.1. Morphismes affines .....	98
4.2. Exactitudes et adjonctions .....	103
4.3. Objets simples .....	108
4.4. Cycles évanescents (estimations supérieures) .....	110
4.5. Estimation de nombres de Betti .....	113
<b>5. La perversité auto-duale : poids</b> .....	118
5.1. Rappels de [1] .....	118
5.2. Une réciproque .....	125
4.3. La filtration par le poids .....	130
4.4. Complexes purs .....	136

<b>6. de <math>\mathbb{F}</math> à <math>\mathbb{C}</math></b> .....	144
<b>6.1. Principes</b> .....	144
<b>6.2. Exemples</b> .....	155
<b>Bibliographie</b> .....	162
<b>Index terminologique</b> .....	164
<b>Index des notations</b> .....	166
<b>Appendix</b> .....	167
<b>Errata et addenda</b> .....	173
<b>Bibliographie additionnelle</b> .....	179



## PRÉFACE À LA DEUXIÈME ÉDITION

Ce volume est une réédition de l'ouvrage *Faisceaux pervers*, publié dans Astérisque 100 comme premier volume des actes de la conférence « Analyse et topologie sur les espaces singuliers », qui s'était tenue à Luminy du 6 au 10 juillet 1981. Le texte original, inchangé, est complété par un bref appendice, une liste d'*errata* et d'*addenda*<sup>1</sup>, et une bibliographie additionnelle.

Comme expliqué au début de l'introduction, Ofer Gabber n'avait pas voulu figurer comme coauteur d'Astérisque 100. Les auteurs sont très heureux qu'il les ait rejoints pour la présente édition.

---

1. Chaque numéro dans la marge renvoie à un *erratum* ou un *addendum* dans la liste de la page 173.

