astérisque 1973

1

Trois problèmes sur les sommes trigonométriques

Yves MEYER

société mathématique de france

Trois problèmes sur les sommes trigonométriques

Yves MEYER [1]

Classification mathématique par sujets (2010). — 42A16, 42A75, 42B37.

Mots clés. — Somme trigonométrique, fonction presque périodique, vibration, comportement asymptotique, ensemble modèle, nombre de Pisot.

Keywords and phrases. — Trigonometric sum, almost periodic function, vibration, asymptotic behavior, model set, Pisot numbers.

1. École normale supérieure Paris-Saclay, 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex. Laboratoire CMLA-CNRS/ENS. Email : yves.meyer@cmla.ens-cachan.fr.

TROIS PROBLÈMES SUR LES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

Yves MEYER

Résumé. — Les fonctions presque périodiques ont été définies et étudiées par le mathématicien danois Harald Bohr. La motivation de Bohr était la théorie des nombres et l'étude des séries de Dirichlet. Un polynôme trigonométrique en une variable réelle x est une somme finie

$$S(x) = \sum_{1}^{N} c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

où les fréquences λ_k sont des nombres réels arbitraires et où les coefficients c_k sont des nombres réels ou complexes. Une fonction presque périodique au sens de Bohr est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite S_m de polynômes trigonométriques. Cette définition amène à calculer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$ ce qui est souvent difficile. Définissons $T(\epsilon) > 0$ comme la borne inférieure de l'ensemble des $|x|$ tels que $|S(x)| \geq (1-\epsilon)\|S\|_\infty$. Estimer $T(\epsilon)$ quand $\epsilon \to 0$ dépend des propriétés arithmétiques de l'ensemble des fréquences λ_k. Ce petit livre est consacré à ces questions qui sont illustrées sur trois exemples.

Abstract (Three problems about trigonometric sums). — Almost periodic functions have been defined and studied by the Danish mathematician Harald Bohr. Bohr's motivations were number theory and Dirichlet series. A trigonometric polynomial $S(x)$ is a function of the real variable x defined by

$$S(x) = \sum_{1}^{N} c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

were the frequencies λ_k are arbitrary real numbers and the coefficients c_k are real or complex numbers. An almost periodic function in the sense given by Bohr is a uniform limit on $\mathbb{R}$ of a sequence S_m of trigonometric polynomials. This definition leads to the computation or estimation of $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$ which is often a hard problem. Let us define $T(\epsilon) > 0$ as the lower bound of the set of $|x|$ such that $|S(x)| \geq (1-\epsilon)\|S\|_\infty$. The estimation of $T(\epsilon)$ as $\epsilon \to 0$ depends on the arithmetical property of the set of frequencies λ_k. This booklet is devoted to these issues which are illustrated on three examples.

Table des matières

Introduction

Voici trois problèmes sur des espaces de sommes trigonométriques (périodiques ou apériodiques) $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont les fréquences appartiennent à un ensemble donné de nombres réels.

- Estimer le supremum M de $|P(t)|$ lorsque $-\infty < t < +\infty$.

- Déterminer combien de temps, à partir de 0, il faudra attendre pour voir $|P(t)|$ dépasser $M/2$ (ou cM, $c > 0$).

- Approcher les fonctions dont le spectre "continu" est un compact E (ou une partie de E) par des sommes trigonométriques dont les fréquences appartiennent à E.

Le premier problème est étudié dans la partie I sur l'exemple de la propagation des ondes sur une sphère élastique homogène. Dans la partie II de ce travail, le second problème trouvera quelques éléments de solution.

Enfin le problème de la synthèse spectrale est examiné dans un cas particulier (III).

L'intérêt des exemples choisis me parait venir de ce que la théorie des nombres y joue un rôle décisif.

TROIS PROBLÈMES

I. ETUDE ASYMPTOTIQUE DES VIBRATIONS DES SPHERES

1. Soient $n \geqslant 3$ un entier naturel, $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien n-dimensionnel, $M = S^{n-1}$ la sphère $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ et $SO(n)$ le groupe orthogonal spécial. On peut munir M d'une structure riemannienne invariante par l'action de $SO(n)$; La distance géodésique entre deux points m et m_o de M sera alors notée $d(m,m_o)$ et $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ désignera l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à cette métrique riemannienne.

Nous allons étudier le comportement asymptotique $(t \longrightarrow +\infty)$ des solutions indéfiniment dérivables $u : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u . \tag{1.1}$$

Soient $H_k \subset \mathcal{C}^\infty(M)$, $k \geqslant 0$, les espaces usuels d'harmoniques sphériques ; φ $M \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à H_k si φ est la restriction à M d'un polynôme homogène de degré k en n variables dont le laplacien ordinaire est nul. Les H_k sont les espaces propres de Δ et les valeurs propres correspondantes sont $-k\,(k+n-2)$ ([3]).

Toute solution $u \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R})$ de (1.1) peut être écrite sous la forme

$$u(m,t) = a_o + \sum_{k \geqslant 1} a_k(m) \cos\sqrt{k(k+n-2)}\,t + b_k(m) \sin\sqrt{k(k+n-2)}\,t \tag{1.2}$$

où a_o est une constante, a_k et b_k appartiennent à H_k, $k \geqslant 1$, et où la série (2) ainsi que toutes celles obtenues en appliquant les opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial t}$ convergent uniformément sur $M \times \mathbb{R}$.