

# FORMES AUTOMORPHES ET THÉORÈMES DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUES

*par*

Vincent Maillot & Damian Rössler

---

*À Jean-Michel Bismut, avec admiration*

**Résumé.** — Nous construisons trois familles de formes automorphes au moyen du théorème de Riemann-Roch arithmétique et de la formule de Lefschetz arithmétique. Deux de ces familles ont déjà été construites par Yoshikawa et notre construction met en lumière leur origine arithmétique.

**Abstract (Automorphic forms and arithmetic Riemann-Roch theorems).** — We construct three families of automorphic forms using the arithmetic Riemann-Roch theorem and the arithmetic Lefschetz formula. Two of these families have already been constructed by Yoshikawa and our construction displays their arithmetic origin.

## 1. Introduction

Le but de ce texte est de donner une interprétation arithmétique et géométrique à trois familles de formes automorphes d'expression analytique. Plus précisément, on démontre que ces formes automorphes sont algébriques et entières, lorsque les espaces sous-jacents ont des modèles entiers.

La première est la famille de formes modulaires de Siegel construite par Yoshikawa dans [26] (voir aussi [14] pour une autre construction). Notre calcul démontre une version légèrement affaiblie d'une conjecture de Yoshikawa sur les coefficients de Fourier de ces formes modulaires.

La deuxième est la famille de formes modulaires d'Igusa « produit des thêta constantes paires », souvent notées  $\chi_g$ . Les formes modulaires  $\chi_g$  dégénèrent au voisinage des variétés abéliennes munies d'un diviseur thêta singulier et notre calcul

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 11F55, 14G40.

**Mots clefs.** — Formes automorphes, théorème de Riemann-Roch arithmétique.

fournit une expression géométrique pour cette dégénérescence, dans le cas où le diviseur thêta singulier est défini sur un corps fini.

La troisième est la famille de formes automorphes à coefficients sur certains espaces de modules de surfaces K3 ; lorsque l'involution est sans point fixe, elles coïncident avec certaines fonctions  $\Phi$  de Borcherds (cf. [27, Sec. 8]). Cette famille de formes est construite par Yoshikawa dans [27, Th. 5.2]. Notre calcul démontre en particulier que les fonctions  $\Phi$  ci-dessus sont d'origine arithmétique.

Dans l'appendice, nous formulons une extension conjecturale de la formule de Lefschetz arithmétique, où des irrégularités sont autorisées sur les fibres finies. Cette formule n'est pas appliquée dans le présent texte mais elle représente un moyen théorique d'étudier la dégénérescence de la deuxième forme modulaire de Yoshikawa lorsqu'on considère une surface K3 avec involution définie sur un corps de nombres et ayant mauvaise réduction en certaines places finies.

Dans ce texte, nous utiliserons librement la terminologie et les résultats énoncés dans la section 4 de [13] (article dans lequel la formule de Lefschetz arithmétique mentionnée plus haut est démontrée). Par ailleurs, nous utiliserons la terminologie et les résultats de [11] (article dans lequel le théorème de Riemann-Roch arithmétique en degré 1 est démontré).

L'objet du présent texte est de présenter des calculs. Pour une introduction au théorème de Riemann-Roch arithmétique et à la formule de Lefschetz arithmétique, nous suggérons de consulter les articles originaux cités dans le dernier paragraphe, ainsi que [8] ou encore les notes [22].

Les résultats de la partie 4 ont fait l'objet d'une communication par les auteurs lors de la conférence « Arithmetic Algebraic Geometry » organisée au R.I.M.S. (Université de Kyoto, Japon) en septembre 2006.

**Remerciements.** — Une partie de ce travail a été réalisée alors que le premier auteur était professeur invité au R.I.M.S. ; il lui est très agréable de remercier cette institution pour son hospitalité et les conditions de travail exceptionnelles dont il a pu bénéficier. Nos remerciements vont également à K.-I. Yoshikawa, pour toutes les explications qu'il nous a fournies sur ses travaux, ainsi qu'au rapporteur pour sa lecture très attentive du manuscrit. Enfin, les auteurs sont reconnaissants à S. Tang de leur avoir signalé une erreur dans la formulation initiale de la Conjecture 5.1.

## 2. Les formes modulaires de Yoshikawa de premier type

Soit  $S$  le spectre d'un anneau arithmétique. Soit  $B$  une variété arithmétique sur  $S$ . Dans ce texte, on appellera *variété arithmétique* sur  $S$  un schéma intègre et régulier, qui est quasi-projectif sur  $S$ . Soit  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow B$  un schéma abélien de dimension relative

$g$ . Soit  $h : \Theta \rightarrow B$  un morphisme lisse et propre de dimension relative  $g - 1$  et  $\theta : \Theta \hookrightarrow \mathcal{A}$  une  $B$ -immersion fermée. On suppose que  $\mathcal{O}(\Theta)$  est un fibré relativement ample et que le degré de  $\mathcal{O}(\Theta)$  est  $g!$  sur chaque fibre géométrique de  $\mathcal{A}/B$ . Une hypothèse équivalente est que la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{O}(\Theta)$  vaut 1 sur chaque fibre géométrique de  $\mathcal{A}/B$ .

Nous noterons  $T\Theta := \Omega_{\Theta/B}^\vee$  et  $T\mathcal{A} := \Omega_{\mathcal{A}/B}^\vee$ . Nous écrirons  $u : B \rightarrow \mathcal{A}$  pour la section unité et  $T\mathcal{A}_0$  pour  $u^*T\mathcal{A}$ . Nous écrirons aussi  $\omega := u^* \det(\Omega_{\mathcal{A}/B})$ . On note  $\overline{\mathcal{O}}(\Theta)$  le fibré  $\mathcal{O}(\Theta)$  muni de sa métrique de Moret-Bailly (voir [16, Par. 3.2]) et on pose  $\overline{L} := \overline{\mathcal{O}}(\Theta) \otimes \pi^* u^* \overline{\mathcal{O}}(\Theta)^\vee$ . La forme  $2\pi \cdot c_1(\overline{L})$  définit une structure de fibration Kählerienne sur  $\mathcal{A}$  au sens de [4, Par. 1]. Soit  $N$  le fibré conormal de l'immersion  $\theta$ .

Le *morphisme de Gauss* est défini de la manière suivante. Le morphisme naturel  $T\Theta \hookrightarrow \theta^*T\mathcal{A}$  induit un morphisme  $\Theta \rightarrow \text{Gr}(g - 1, \theta^*T\mathcal{A})$ . Utilisant les isomorphismes naturels  $\text{Gr}(g - 1, \theta^*T\mathcal{A}) \simeq \theta^* \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A})$ ,  $\text{Gr}(g - 1, \pi^*T\mathcal{A}_0) \simeq \pi^* \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0)$  et  $T\mathcal{A} \simeq \pi^*T\mathcal{A}_0$ , on obtient un morphisme naturel  $\Theta \rightarrow h^* \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0)$ . Si l'on compose ce dernier avec la projection naturelle de  $h^* \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0) = \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0) \times_B \Theta$  sur le premier facteur, on obtient le morphisme de Gauss  $\gamma : \Theta \rightarrow \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0)$ . On note  $p : P := \text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0) \rightarrow B$  l'application structurale. Pour la définition de  $\text{Gr}(\cdot, \cdot)$  voir [7, App. B.5.7]. On notera

$$\mathcal{E} : 0 \rightarrow E \rightarrow p^*T\mathcal{A}_0 \rightarrow Q \rightarrow 0$$

la suite exacte universelle sur  $P$ . Si l'on munit  $p^*T\mathcal{A}_0$  de la métrique image réciproque de celle de  $T\mathcal{A}_0$  et les fibrés  $E$  et  $Q$  des métriques induites, on obtient à partir de  $\mathcal{E}$  une suite exacte métrisée que nous noterons  $\overline{\mathcal{E}}$ .

**Lemme 2.1.** — *Le morphisme de Gauss est génériquement fini de degré  $g!$ .*

*Démonstration.* — Le fait que le morphisme de Gauss est génériquement fini (ou autrement dit, qu'il induit une extension finie de corps de fonctions  $\kappa(\Theta)|_{\kappa(\text{Gr}(g - 1, T\mathcal{A}_0))}$ ) est démontré dans [2, Th. 4]. Pour calculer son degré, nous considérons le calcul suivant dans la théorie de Chow de  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned} g! &\stackrel{(1)}{=} \pi_*(c_1(\mathcal{O}(\Theta))^g) = \pi_*(\theta_*(1) c_1(\mathcal{O}(\Theta))^{g-1}) \stackrel{(2)}{=} h_*(c_1(\theta^*(\mathcal{O}(\Theta))))^{g-1} \\ &\stackrel{(3)}{=} h_*(c_1(N^\vee)^{g-1}) \stackrel{(4)}{=} p_*\gamma_*(\gamma^*(c_1(Q)^{g-1})) = \text{deg}(\gamma)p_*(c_1(Q)^{g-1}) \\ &\stackrel{(5)}{=} \text{deg}(\gamma). \end{aligned}$$

L'égalité (1) est justifiée par le théorème de Riemann-Roch (appliqué au morphisme  $\pi$  et au fibré  $\mathcal{O}(\Theta)$ ), l'égalité (2) est justifiée par la formule de projection, l'égalité (3) est justifiée par la formule d'adjonction, l'égalité (4) est une conséquence la définition de  $P$  et pour finir (5) est une conséquence du fait que le degré de  $\mathcal{O}(1)$  sur un espace projectif au-dessus d'un corps vaut 1. □

Nous appliquons maintenant le théorème de Riemann-Roch arithmétique à  $\Theta$ .

**Lemme 2.2.** — *Les égalités suivantes*

$$\begin{aligned} \widehat{c}_1(R^\bullet h_*(\overline{\Theta}_\Theta)) &= (-1)^g \widehat{c}_1(R^0 \pi_*(\overline{\Omega}_\Theta^g)) + \log\left(\frac{g!!}{(g-1)!!}\right) \\ &= (-1)^{g+1} \widehat{c}_1(\overline{\text{T}\mathcal{U}}_0) + \log\left(\frac{g!!}{(g-1)!!}\right) \end{aligned}$$

sont vérifiées.

On rappelle que par définition de la double factorielle :

$$\frac{g!!}{(g-1)!!} = \frac{g(g-2) \cdots (1 + (1 + (-1)^g)/2)}{(g-1)(g-3) \cdots (1 + (1 - (-1)^g)/2)}.$$

*Démonstration.* — Soit  $M$  une variété Kählerienne de dimension  $g$  et de forme de Kähler  $\underline{\omega}$ . Soit  $k \geq 0$  et soit  $\nu \in H^k(M, \mathcal{O}_M)$ . On dispose de la formule suivante :

$$(1) \quad |\nu|_{L_2}^2 := \frac{i^k (-1)^{k(k+1)/2}}{(2\pi)^g (g-k)!} \int_M \nu \wedge \bar{\nu} \wedge \underline{\omega}^{g-k}.$$

Voir [15, Par. 2.3]. Par ailleurs, considérons la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow R^0 \pi_* \mathcal{O} \rightarrow R^0 h_* \mathcal{O}_\Theta \rightarrow 0 \\ &\rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O} \rightarrow R^1 h_* \mathcal{O}_\Theta \rightarrow 0 \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow \\ 0 &\rightarrow R^{g-1} \pi_* \mathcal{O} \rightarrow R^{g-1} h_* \mathcal{O}_\Theta \rightarrow R^g \pi_* \mathcal{O}(-\Theta) \xrightarrow{\star} R^g \pi_* \mathcal{O} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

née de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-\Theta) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\Theta \rightarrow 0.$$

On remarque aussi que la flèche  $\star$  est un isomorphisme car  $R^g \pi_* \mathcal{O}$  est localement libre de rang 1. Toutes les flèches reliant deux objets non-nuls dans la suite exacte longue sont donc des isomorphismes. En particulier les faisceaux de cohomologie  $R^k h_* \mathcal{O}_\Theta$  sont localement libres. De plus, en comparant la formule (1) sur les fibres de  $\mathcal{U}(\mathbb{C})$  et sur les fibres de  $\Theta(\mathbb{C})$ , on conclut que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq g-1$ , on a

$$(2) \quad \widehat{c}_1(R^k \pi_*(\overline{\Theta}_\Theta)) = \widehat{c}_1(R^k h_*(\overline{\Theta}_\Theta)) - \log(g-k).$$

On utilisé ici le fait que la forme de Kähler sur les fibres est donnée par  $2\pi \cdot c_1(\overline{\Theta}(\Theta))$ . Si l'on combine cette dernière égalité avec l'égalité

$$(3) \quad \widehat{c}_1(R^\bullet \pi_*(\overline{\Theta}_\Theta)) = 0$$

on obtient la première égalité du lemme. L'égalité (3) est une conséquence immédiate du théorème de Riemann-Roch arithmétique appliqué à  $\pi$  et  $\overline{\Theta}_\Theta$  et de l'annulation de la torsion analytique du fibré trivial d'une variété abélienne de dimension  $\geq 2$  (cf.

[20, Par. 5, p. 173]). La deuxième égalité du lemme est une conséquence de la formule de projection.  $\square$

Le théorème de Riemann-Roch arithmétique appliqué à  $h$  et au fibré hermitien trivial sur  $\Theta$  donne l'égalité suivante dans  $\widehat{\text{CH}}^{\leq 1}(B)_{\mathbb{Q}}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{ch}}(R^{\bullet}h_*\overline{\mathcal{O}}_{\Theta}) - T(\Theta, \overline{\mathcal{O}}_{\Theta}) &= h_*(\widehat{\text{Td}}(\overline{\text{T}h})) - \int_{\Theta/B} R(\text{T}h) \text{Td}(\text{T}h) \\ &= g! p_*(\widehat{\text{Td}}(\overline{E})) - g! \int_{P/B} R(E) \text{Td}(E) \\ &= g! \int_{P/B} \text{Td}^{-1}(\overline{Q})\widehat{\text{Td}}(\overline{E}) + g! p_*(\widehat{\text{Td}}^{-1}(\overline{Q})\widehat{\text{Td}}(p^*\overline{\mathcal{O}}_0)) \\ &\quad - g! \int_{P/B} R(E) \text{Td}(E). \end{aligned}$$

Remarquons à présent que pour tout  $k \geq 0$ , on a

$$\widehat{\text{Td}}^{-1}(\overline{Q})^{[k]} = -\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \widehat{c}_1(\overline{Q})^k$$

(on rappelle que par définition  $\text{Td}^{-1}(x) = (1 - \exp(-x))/x$ ). Par ailleurs, selon [17, Par. 8.2]

$$p_*(\widehat{c}_1(\overline{Q})^g) = \left[ \sum_{l=1}^{g-1} \mathcal{H}_l \right] + \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0);$$

ici  $\mathcal{H}_l := \sum_{k=1}^l \frac{1}{k}$  est le  $l$ -ème nombre harmonique. On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned} &g! p_*(\widehat{\text{Td}}^{-1}(\overline{Q})\widehat{\text{Td}}(p^*\overline{\mathcal{O}}_0))^{[\leq 1]} \\ &= -g! \left( 1 + \frac{1}{2} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0) \right) \cdot \left( \frac{(-1)^g}{g!} \text{deg}(Q) + \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0) + \left[ \sum_{l=1}^{g-1} \mathcal{H}_l \right]) \right) \\ &= -g! \left( 1 + \frac{1}{2} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0) \right) \cdot \left( \frac{(-1)^g}{g!} + \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0) + \left[ \sum_{l=1}^{g-1} \mathcal{H}_l \right]) \right) \\ &= -(1 + \frac{1}{2} \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0)) \cdot \left( (-1)^g + \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)} (\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{O}}_0) + \left[ \sum_{l=1}^{g-1} \mathcal{H}_l \right]) \right) \end{aligned}$$