

**424**

**ASTÉRISQUE**

**2021**

REVISITING THE DE RHAM-WITT COMPLEX

Bhargav BHATT, Jacob LURIE & Akhil MATHEW

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 424, 2021

---

*Comité de rédaction*

Marie-Claude ARNAUD      Fanny KASSEL  
Christophe BREUIL      Eric MOULINES  
Damien CALAQUE      Alexandru OANCEA  
Philippe EYSSIDIEUX      Nicolas RESSAYRE  
Christophe GARBAN      Sylvia SERFATY  
Colin GUILLARMOU  
Nicolas BURQ (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF      AMS  
Case 916 - Luminy      P.O. Box 6248  
13288 Marseille Cedex 9      Providence RI 02940  
France      USA  
commandes@smf.emath.fr      <http://www.ams.org>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 40 € (\$ 60)  
*Abonnement* Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2020

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)  
ISBN 978-2-85629-937-1  
doi:10.24033/ast.1146

Directeur de la publication : Fabien Durand

---

**424**

**ASTÉRISQUE**

**2021**

REVISITING THE DE RHAM-WITT COMPLEX

Bhargav BHATT, Jacob LURIE & Akhil MATHEW

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Bhargav Bhatt*  
2074 East Hall  
530 Church Street  
Ann Arbor, MI 48109, USA

*Jacob Lurie*  
1 Einstein Drive  
Princeton, New Jersey 08540, USA

*Akhil Mathew*  
Department of Mathematics  
University of Chicago  
5734 S. University Ave.  
Chicago, IL 60637-1514, USA

Texte reçu le 23 septembre 2018, révisé le 16 novembre 2019, accepté le 10 février 2020.

---

*Mathematical Subject Classification (2010).* — 14F30, 14F40, 14G17, 11G25.

*Keywords.* — De Rham-Witt complex, crystalline cohomology, Witt vector.

*Mots-clefs.* — Complexe de de Rham-Witt, cohomologie cristalline, vecteur de Witt.

# REVISITING THE DE RHAM-WITT COMPLEX

by Bhargav BHATT, Jacob LURIE & Akhil MATHEW

**Abstract.** — The goal of this book is to offer a new construction of the de Rham-Witt complex of a smooth variety over a perfect field of characteristic  $p > 0$ .

We introduce a category of cochain complexes which are equipped with an endomorphism  $F$  of underlying graded abelian groups satisfying  $dF = pFd$ , whose homological algebra we study in detail. To any such object satisfying an abstract analog of the Cartier isomorphism, an elementary homological process associates a generalization of the de Rham-Witt construction. Abstractly, the homological algebra can be viewed as a calculation of the fixed points of the Berthelot-Ogus operator  $L\eta_p$  on the  $p$ -complete derived category. We give various applications of this approach, including a simplification of the crystalline comparison for the  $A\Omega$ -cohomology theory introduced in [12].

**Résumé. (Revisiter le complexe de de Rham-Witt)** — Le but cet article est de présenter une nouvelle construction du complexe de Rham-Witt d'une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ .

Nous introduisons une catégorie de complexes de cochaînes munis d'un endomorphisme  $F$  des groupes abéliens gradués sous-jacents satisfaisant  $dF = pFd$ , catégorie dont nous étudions en détail l'algèbre homologique. À partir d'un objet de cette catégorie satisfaisant un analogue abstrait de l'isomorphisme de Cartier, un procédé homologique élémentaire associe une généralisation de la construction de de Rham-Witt. On peut interpréter abstraitement cette algèbre homologique comme un calcul des points fixes de l'opérateur de Berthelot-Ogus  $L\eta_p$  sur la catégorie dérivée  $p$ -complète. Nous donnons diverses applications de cette approche, notamment une simplification du théorème de comparaison cristallin de la théorie de cohomologie  $A\Omega$  introduite dans [12].