

**432**

**ASTÉRISQUE**

**2022**

A THEORY OF DORMANT OPERS  
ON POINTED STABLE CURVES

Yasuhiro WAKABAYASHI

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Comité de rédaction*

Marie-Claude ARNAUD	Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL	Nicolas RESSAYRE
Philippe EYSSIDIEUX	Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU	Sylvia SERFATY
Fanny KASSEL	Sug Woo SHIN
Eric MOULINES	

Nicolas BURQ (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA

commandes@smf.emath.fr    <http://www.ams.org>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 60 € (\$ 90)  
*Abonnement* Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)  
ISBN 978-2-85629-956-2  
doi:10.24033/ast.1171

Directeur de la publication : Fabien Durand

---

**432**

**ASTÉRISQUE**

**2022**

A THEORY OF DORMANT OPERS  
ON POINTED STABLE CURVES

Yasuhiro WAKABAYASHI

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Yasuhiro Wakabayashi*

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama,  
Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan  
wkbysh@math.titech.ac.jp

Texte reçu le 22 décembre 2017 ; révisé le 24 avril 2021 ; accepté le 21 octobre 2021.

---

**Mathematical Subject Classification (2010).** — 14H10, 14H60.

**Keywords.** —  $p$ -adic Teichmüller theory, pointed stable curve, moduli space, positive characteristic, algebraic group, Lie algebra, principal bundle, connection, differential operator, oper,  $p$ -curvature, fusion ring, Quot-scheme.

**Mots-clefs.** — Théorie de Teichmüller  $p$ -adique, courbe stable pointée, espace de modules, caractéristique positive, groupe algébrique, algèbre de Lie, fibré principal, connexion, opérateur différentiel, oper,  $p$ -courbure, anneau de fusion, schéma Quot.

# A THEORY OF DORMANT OPERS ON POINTED STABLE CURVES

by Yasuhiro WAKABAYASHI

*Abstract.* — This manuscript presents a detailed and original account of the theory of opers defined on pointed stable curves in arbitrary characteristic and their moduli. In particular, it includes the development of the study of dormant opers, which are opers of a certain sort in positive characteristic. The theory of dormant opers (or more generally, opers in positive characteristic) on pointed stable curves, which has proved to be rather rich and deep, was born in the work of S. Mochizuki, who developed the theory for  $\mathfrak{sl}_2$ -opers and used it to establish  $p$ -adic Teichmüller theory. Some parts of Mochizuki's work were later extended in the case of proper smooth curves by K. Joshi, C. Pauly, and other mathematicians. This manuscript represents an advance in the theory of opers that takes the subject beyond the work of Mochizuki, Joshi, and Pauly. In particular, we provide general unified formulations and the basics of principal bundles and connections defined on families of pointed stable curves. The notion of an oper is accordingly introduced in the context of logarithmic algebraic geometry. Some of the results can be regarded as generalizations of results obtained in the fundamental work on the geometric Langlands program developed by A. Beilinson and V. Drinfeld. We also describe various properties and assertions about (dormant) opers, such as duality, comparison with differential operators, and compactification of the moduli space. Our goal is to give an explicit formula, conjectured by Joshi, for the generic number of dormant  $\mathfrak{sl}_n$ -opers. We do so by obtaining a detailed understanding of the moduli space of dormant opers and computing the Gromov-Witten invariants for Quot schemes in characteristic zero. This formula reveals an interaction between studies in  $p$ -adic Teichmüller theory and certain areas of mathematics, including Gromov-Witten theory.

*Résumé.* (Une théorie des opers dormants sur des courbes stables pointées) — Ce manuscrit expose de manière détaillée et originale la théorie des opers définis sur des courbes stables pointées en caractéristique arbitraire et leurs modules. En particulier, il développe l'étude des opers dormants, qui sont des opers d'un certain type en caractéristique positive. La théorie des opers dormants (ou plus généralement des opers en caractéristique positive) sur des courbes stables pointées, qui s'est avérée assez riche et profonde, est née des travaux de S. Mochizuki, qui a développé la théorie des  $\mathfrak{sl}_2$ -opers et l'a utilisé pour établir la théorie de Teichmüller  $p$ -adique.