Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70[e] année, 2017–2018, n[o] 1136, p. 1 à 48
doi:10.24033/ast.1080

PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LE PROGRAMME DE ZIMMER [d'après A. Brown, D. Fisher et S. Hurtado]

par **Serge CANTAT**

1. LE PROGRAMME DE ZIMMER

1.1. Réseaux des groupes de Lie

1.1.1. — Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie g est simple (de dimension > 1) et le centre est fini. La représentation adjointe $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathsf{GL}(\mathsf{g})$ est obtenue en dérivant l'action de G sur lui-même par conjugaison ; son noyau est le centre de G. Le **rang** réel $\mathrm{rg}(G)$ est la dimension maximale d'un sous-groupe de Lie $A \subset G$ tel que $\mathrm{Ad}(A)$ soit diagonalisable (sur $\mathbf{R}$). Par exemple, le rang réel des groupes $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{C})$ et $\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ est égal à n ; celui de $\mathsf{SO}_{p,q}(\mathbf{R})$ est le minimum de p et q.

Nous noterons vol_G une mesure de Haar sur G. Un **réseau** de G est un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ tel que la mesure de Haar du quotient G/Γ est finie ; il est **uniforme** si G/Γ est compact. Par exemple, $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ est un réseau non uniforme de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$.

Lorsque $\mathrm{rg}(G) \geq 2$, les réseaux héritent de nombreuses propriétés du groupe G. Gregory Margulis montre ainsi que les réseaux sont **presque simples** : *leurs sous-groupes distingués sont ou bien d'indice fini, ou bien finis et contenus dans le centre de G*. Il établit aussi un théorème de rigidité décrivant les représentations linéaires des réseaux en fonction de celles de G. Pour l'énoncer nous supposerons que G est algébriquement simplement connexe, c'est-à-dire que tout morphisme d'algèbres de Lie $\mathsf{g} \to \mathsf{sl}_m(\mathbf{R})$ s'étend en un homomorphisme de groupes de Lie $G \to \mathsf{SL}_m(\mathbf{R})$; cette hypothèse n'est pas essentielle car on s'y ramène en remplaçant G par un revêtement fini.

Théorème 1.1 (super-rigidité de Margulis, [**51, 56**]). — *Soit G un groupe de Lie connexe et algébriquement simplement connexe, dont l'algèbre de Lie est simple, le centre est fini et le rang est ≥ 2. Soient Γ un réseau de G et $\varphi\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$*

un homomorphisme. Il existe alors un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini, un homomorphisme de groupes de Lie $\hat{\varphi}\colon G \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$, un sous-groupe compact $C \subset \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$ qui centralise $\hat{\varphi}(G)$, et un homomorphisme $\psi\colon \Gamma \to C$ tels que $\varphi(\gamma) = \hat{\varphi}(\gamma)\psi(\gamma)$ pour tout élément γ de Γ'.

Si $\varphi(\Gamma)$ n'est pas borné et si son adhérence de Zariski est simple, le groupe C est réduit à l'identité. À l'opposé, considérons un homomorphisme $\varphi\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ et supposons que l'adhérence de $\varphi(\Gamma)$ pour la topologie usuelle soit un groupe compact et simple. Il existe alors un automorphisme σ du corps $(\mathbf{C}, +, \times)$ tel que $\sigma(\varphi(\Gamma))$ soit discret, et un homomorphisme de groupes de Lie $\hat{\varphi}\colon G \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ tel que $\sigma(\varphi(\gamma)) = \hat{\varphi}(\gamma)$ pour tous les éléments γ d'un sous-groupe d'indice fini de Γ.

1.1.2. — Ces énoncés montrent que les représentations linéaires de Γ se déduisent de celles de G ; en particulier, *la dimension minimale d'une représentation linéaire $\Gamma \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ dont le noyau est fini coïncide avec la dimension minimale d'une représentation non triviale de G*. Après avoir étendu le théorème de Margulis en un théorème de rigidité pour des cocycles (voir le § 6.1), Robert Zimmer demanda si cette dernière propriété avait un analogue non linéaire, c'est-à-dire pour les actions de Γ par difféomorphismes sur des variétés compactes. [(1)]

Avant de formuler l'une des questions de Zimmer, considérons l'exemple d'une action $\mathscr{C}^\infty$ et fidèle de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ sur une variété compacte connexe M de dimension d. Notons K le sous-groupe compact $\mathsf{SO}_{n+1}(\mathbf{R})$. La moyenne d'une métrique riemannienne s_0 sous l'action de K produit une métrique riemannienne s sur M qui est K-invariante. Soient x un point de M et K_x son stabilisateur ; on a $\dim(K) \leq \dim(K_x) + d$. Par ailleurs, la différentielle

$$D\colon k \in K_x \mapsto Dk_x \in \mathsf{GL}(T_xM) \tag{1}$$

détermine un homomorphisme injectif car toute isométrie de (M, s) qui fixe x est uniquement déterminée par sa différentielle en x. L'image de D est contenue dans le groupe orthogonal pour la métrique euclidienne s_x et celui-ci est de dimension $d(d-1)/2$. Ainsi, $\dim(K) = n(n+1)/2 \leq d + d(d-1)/2$ et donc $n \leq d$.

Cet argument montre qu'il n'existe pas d'action fidèle du groupe $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ en dimension $d < n$, et cette borne est optimale car $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ agit sur l'espace

(1) *Tout groupe dénombrable agit fidèlement sur une surface de Riemann connexe non compacte.* Considérons en effet l'action homographique standard du groupe modulaire $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$. Soit F un sous-groupe libre d'indice fini dans $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{Z})$; le quotient $\Sigma = \mathbb{H}/F$ est une surface de Riemann de type fini. Soit Ω un groupe dénombrable. Il existe alors un sous-groupe distingué $F_0 \subset F$ tel que Ω se plonge dans F/F_0 (voir [**48**], § V.10). Le quotient $\mathbb{H}/F_0$ est une surface de Riemann Σ_0, munie d'un revêtement galoisien $\Sigma_0 \to \Sigma$ dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à F/F_0 ; le groupe Ω agit donc fidèlement par difféomorphismes holomorphes sur Σ_0.

projectif $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ et la sphère $\mathbb{S}^n$. Plus généralement, on démontre que *les actions fidèles d'un groupe de Lie simple G ne peuvent apparaître en dimension* $< \mathrm{rg}(G)$.

La question suivante peut être tirée des conjectures de Zimmer et illustre bien ces dernières. Elle demande si le résultat précédent s'étend aux réseaux : *un réseau Γ de G peut-il agir fidèlement sur une variété compacte de dimension* $< \mathrm{rg}(G)$ *par difféomorphismes ?* Aaron Brown, David Fisher et Sebastian Hurtado viennent d'y répondre pour les réseaux uniformes.

1.2. Un énoncé

Le but principal de cet exposé est donc de présenter le théorème suivant, issu de [**11**].

Théorème A. — *Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est simple et le centre est fini. Soient Γ un réseau uniforme de G et M une variété compacte. S'il existe un homomorphisme $\alpha\colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^\infty(M)$ d'image infinie, alors* $\dim(M) \geq \mathrm{rg}(G)$. *Si, en plus, $\alpha(\Gamma)$ préserve une forme volume et* $\mathrm{rg}(G) \geq 2$, *alors* $\dim(M) \geq \mathrm{rg}(G) + 1$.

L'action de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ montre que l'inégalité $\dim(M) \geq \mathrm{rg}(G)$ est optimale dans le cas des réseaux de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$.

Ce théorème suppose Γ uniforme : cette hypothèse technique devrait être supprimée dans un avenir proche (voir le §11.2). Nous verrons que le théorème A reste valable pour des actions de classe $\mathcal{C}^2$; l'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^\infty$ est là pour simplifier un passage technique de la démonstration. La méthode de Brown, Fisher et Hurtado repose sur la théorie de Pesin en systèmes dynamiques et nécessite donc au minimum une régularité $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Il se pourrait toutefois que le théorème A reste valable pour des actions par homéomorphismes. Par exemple, Dave Witte-Morris montre que tout homomorphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}(3,\mathbf{Z})$ vers le groupe des homéomorphismes du cercle $\mathbb{S}^1$ a une image finie, et Étienne Ghys étend ce résultat aux homomorphismes des réseaux des groupes de Lie simples de rang ≥ 2 vers le groupe $\mathsf{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$ (voir [**30, 31, 67**]).

Le théorème A est une version simplifiée des résultats principaux de [**11**]. Nous verrons au paragraphe 2.4 quelle est la dimension critique optimale qui est maintenant conjecturée en fonction du groupe de Lie G. D'autres énoncés issus de [**11**] seront décrits aux paragraphes 2.5 et 11.3.

1.3. Groupes de difféomorphismes

Zimmer demande ce qu'il advient des théorèmes de rigidité pour les actions par difféomorphismes et, comme nous le verrons, offre des outils pour aborder ce problème. Plus généralement, il s'agit de déterminer les propriétés des groupes de Lie classiques et de leurs sous-groupes de type fini qui sont partagées par les groupes de difféomorphismes des variétés compactes. Illustrons ceci par deux exemples.

L'alternative de Tits affirme qu'un sous-groupe Λ de $\mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ qui ne contient pas de groupe libre non abélien contient automatiquement un sous-groupe d'indice fini qui est résoluble ; ainsi, ou bien Λ contient un groupe libre non abélien, ou bien Λ contient un sous-groupe d'indice fini qui préserve un drapeau complet dans $\mathbf{C}^m$. Les groupes de difféomorphismes ne satisfont pas à cette alternative. Par exemple, le groupe de Thompson $F \subset \mathsf{Homeo}([0,1])$ se plonge dans le groupe des difféomorphismes du cercle [**32**], ne contient pas de groupe libre non abélien [**8**], mais ne satisfait aucune loi et ne contient donc pas de sous-groupe résoluble d'indice fini [**8**]. Margulis démontre cependant le théorème suivant, qui peut être perçu comme une alternative de Tits dans laquelle le drapeau invariant est remplacé par une mesure de probabilité : *soit* Λ *un sous-groupe de* $\mathsf{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ *; ou bien* Λ *contient un groupe libre non abélien, ou bien* Λ *préserve une mesure de probabilité sur* $\mathbb{S}^1$ (voir [**31, 52**]).

Considérons maintenant le théorème de Burnside. Soit Λ un groupe d'exposant borné, c'est-à-dire qu'il existe un entier $q > 0$ tel que l'ordre de tout élément de Λ divise q. Si Λ se plonge dans un groupe linéaire $\mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$, alors Λ est fini [**16**]. Sebastian Hurtado, Nancy Guelman et Isabelle Liousse ont obtenu la même conclusion si Λ se plonge dans le groupe des difféomorphismes d'une surface compacte préservant l'aire (voir [**34, 37**]).

Nous renvoyons le lecteur à [**15**], [**22, 23**] et [**31**] pour des articles de synthèse concernant ce type de problèmes.

1.4. Actions analytiques et plan du texte

Avant d'expliquer la structure de ce texte, étudions un cas simple : celui des actions analytiques de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ en petite dimension (voir [**29, 31, 67**] et [**19**]).

1.4.1. *Germes de difféomorphismes.* — Soit Γ un réseau de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, avec $n \geq 2$. Pour tout entier $m \geq 1$, notons $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbf{R}^m; 0)$ le groupe des germes de difféomorphismes analytiques de $\mathbf{R}^m$ fixant l'origine. Montrons que, *si* $m \leq n$*, tout homomorphisme* $\alpha\colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^\omega(\mathbf{R}^m; 0)$ *a une image finie*. Tout d'abord, le théorème de super-rigidité de Margulis entraîne que l'homomorphisme « partie linéaire »

$$\gamma \in \Gamma \mapsto D\alpha(\gamma)_0 \in \mathsf{GL}_m(\mathbf{R}) \tag{2}$$

a une image finie ; notons Γ_0 son noyau. C'est un réseau de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, donc tout homomorphisme de Γ_0 vers un groupe abélien ou résoluble a une image finie. Mais le groupe des jets d'ordre k de difféomorphismes qui sont tangents à l'identité est un groupe résoluble sans torsion. Donc le développement de Taylor des éléments de $\alpha(\Gamma_0)$ est trivial à tout ordre ; l'action étant analytique, $\alpha(\Gamma_0) = \{\mathrm{Id}\}$ et $\alpha(\Gamma)$ est fini.

1.4.2. *Actions sur le cercle.* — Montrons que *tout homomorphisme d'un sous-groupe d'indice fini* Γ *de* $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ *vers le groupe des difféomorphismes analytiques* $\mathsf{Diff}^{\omega}(\mathbb{S}^1)$ *a une image finie si* $n \geq 2$.

Il suffit de considérer le cas $n = 2$. En remplaçant Γ par un sous-groupe d'indice ≤ 2, nous pouvons supposer que Γ préserve l'orientation de $\mathbb{S}^1$. Nous noterons $E_{i,j}$ le sous-groupe de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$ constitué des matrices élémentaires $\mathrm{Id} + t\delta_{i,j}$, $t \in \mathbf{R}$, et U le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Soit Γ_U l'intersection de Γ avec U. C'est un groupe moyennable, donc son action sur le cercle préserve une mesure de probabilité μ. Si f est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui préserve l'orientation, et si $\tilde{f} \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un relevé de f au revêtement universel, la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t) - t$ est 1-périodique ; elle passe au quotient en une fonction sur le cercle, et le nombre de rotation de f se trouve être égal à

$$\mathrm{rot}(f) = \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \tilde{f}(t) - t \; d\mu(t) \;\; (\text{modulo } 1). \tag{3}$$

Puisque μ est invariante sous l'action de Γ_U, on en déduit que le nombre de rotation est un homomorphisme en restriction à Γ_U (voir [**31**]). Il s'annule sur le groupe dérivé Γ'_U de Γ_U, qui est un sous-groupe cyclique d'indice fini dans $\Gamma \cap E_{1,3}$. L'ensemble F des points fixes de Γ'_U est donc un ensemble non vide, et fini car l'action est analytique ; tout sous-groupe d'indice fini de Γ'_U a exactement les mêmes points fixes ; et le support de μ est contenu dans F. Puisque Γ_U centralise Γ'_U, un sous-groupe d'indice fini de Γ_U fixe F point par point.

Considérons maintenant le groupe $\Gamma \cap E_{2,1}$: il commute à Γ'_U, donc préserve aussi F, si bien qu'il existe un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \cap E_{2,1}$ dont l'ensemble des points fixes coïncide avec F. Puisque $E_{2,1}$ et $E_{3,1}$ commutent, un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \cap E_{3,1}$ fixe aussi F. Nous avons donc construit des sous-groupes d'indices finis dans Γ_U, $\Gamma \cap E_{2,1}$ et $\Gamma \cap E_{3,1}$ qui ont un point fixe commun. Ces groupes engendrent un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_0 \subset \Gamma$ fixant un point : le paragraphe 1.4.1 montre que son image dans $\mathsf{Diff}^{\omega}(\mathbb{S}^1)$ est finie, ce qui conclut la preuve.

1.4.3. *Actions sur la sphère.* — Considérons maintenant un sous-groupe Ω d'indice fini dans le produit semi-direct $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3$, l'action de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^3$ étant induite par l'action usuelle de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^3$. Fixons un homomorphisme α de ce groupe vers celui des difféomorphismes analytiques de la sphère $\mathbb{S}^2$ qui préservent l'orientation.

Soit Λ l'intersection de Ω avec le facteur abélien $\mathbf{Z}^3$. Soit f un élément non trivial de $\alpha(\Lambda)$. Puisque la caractéristique d'Euler de $\mathbb{S}^2$ n'est pas nulle, l'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f n'est pas vide ; il est invariant sous l'action de Λ. Si $\mathrm{Fix}(f)$ comporte un point singulier ou un point isolé, un sous-groupe d'indice fini de Λ fixe ce point. Sinon, $\mathrm{Fix}(f)$ est une union finie de courbes lisses homéomorphes à des cercles. Soit D l'une des composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathrm{Fix}(f)$ homéomorphe à un disque. Soit g un