Bull. Soc. math. France
129 (1), 2001, p. 1–31

SUR CERTAINES EXTENSIONS DE SU$(n, 4)$

PAR MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on étudie certaines extensions scindées et non scindées des groupes unitaires $\mathrm{SU}(n, 4)$, pour $n \geq 4$, sur le corps $\mathbb{F}_4$ par des 2-groupes extra-spéciaux. Les extensions ainsi obtenues sont des groupes de 3-transpositions, on en donne des présentations fischériennes.

ABSTRACT (*On some extensions of* $\mathrm{SU}(n, 4)$). — In this paper we study some split and nonsplit extensions of unitary groups $\mathrm{SU}(n, 4)$, $n \geq 4$, over the field $\mathbb{F}_4$ by extraspecial 2-groups.These extensions are 3-transpositions groups for which we give Fischerian presentations.

1. Introduction

1.1. Objet du travail. — Une classe de 3-*transpositions* d'un groupe G est une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 engendrant G telle que le produit de deux éléments quelconques de la classe est d'ordre au plus 3. L'objet de ce travail est l'étude de certaines extensions des groupes spéciaux unitaires $\mathrm{SU}(n, 4)$ sur le corps $\mathbb{F}_4$ par des 2-groupes extra-spéciaux. On dit qu'un p-groupe E (avec p premier) est *extra-spécial* si le groupe de Frattini de E (intersection des sous-groupes maximaux de E) est d'ordre p et égal au centre de E. L'ordre d'un p-groupe extra-spécial est toujours une puissance impaire de p.

Texte reçu le 10 mars 1999, révisé le 2 septembre 1999

MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 9984, Université de Paris 7 Denis Diderot, 2 place Jussieu 75251 Paris Cedex (France).

Classification mathématique par sujets (2000). — 20, 20F.

Mots clefs. — 2-groupe extra-spécial, extension, graphe de Coxeter, groupe de 3-transpositions, groupe unitaire, présentation fischérienne, transvection unitaire.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2001/1/$ 5.00

Le centre d'un p-groupe extra-spécial non abélien est cyclique d'ordre p et est égal au groupe dérivé $\mathcal{D}(E)$ de E. Les p-groupes extra-spéciaux considérés ici correspondent au cas $p = 2$ et sont obtenus de la manière suivante. On considère l'ensemble D des transvections unitaires du groupe $\mathrm{SU}(n+2,4)$; c'est une classe de 3-transpositions du groupe $\mathrm{SU}(n+2,4)$ et l'on fixe un élément d de D. Les éléments de D qui commutent à d engendrent un sous-groupe d'indice 3 (noté $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$) du centralisateur de d dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$. Le groupe $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ est appelé D-*centralisateur* de d dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$ et est l'extension scindée

$$1 \to 2^{2n-3} \longrightarrow \mathrm{DC}_{\mathrm{n+2}}(d) \longrightarrow \mathrm{SU}(n,4) \to 1$$

où 2^{2n-3} désigne un 2-groupe extra-spécial de centre le groupe cyclique engendré par d. Le but de cet article est de donner une présentation fischérienne du groupe $\mathrm{DC}_{n+2}(d)$ pour $n \geq 4$.

1.2. Définitions. Conventions et notations utiles

1) On appelle *système de Fischer* (G, X) la donnée d'un groupe G et d'un ensemble générateur X formé d'involutions tel que pour x_1 et x_2 dans X, l'ordre du produit x_1x_2 est au plus 3. Une présentation $(X/\gamma, \mathcal{R})$ d'un groupe G est dite *fischérienne* si le couple (G, X) est un système de Fischer, si γ est le graphe de Coxeter associé à X (*i.e.* les sommets de γ sont indexés par les éléments de X, et x_1 et x_2 sont liés par une arête si et seulement si le produit x_1x_2 est d'ordre 3) et si $\mathcal{R}$ est un ensemble de relations de la forme

$$(x_1^g x_2)^k = 1 \text{ avec } 1 \leq k \leq 3, \quad g \text{ dans } G, \text{ et } x_1, x_2 \text{ dans } X.$$

Soient G un groupe de présentation $(X/\gamma, \mathcal{R})$ et H un quotient de G par un sous-groupe central de G ; une présentation $(X/\gamma, \mathcal{R}, \mathcal{S})$ de H est encore dite fischérienne.

Un système de Fischer (G, X) s'appelle un *couple fischérien* lorsque X est une classe de conjugaison de G. Dans ce cas, on dit que G est un *groupe de* 3-*transpositions* et que X est une *classe de* 3-*transpositions* ou encore une *classe de Fischer*.

Soit G un groupe ; on désigne par $\mathrm{Z}(G)$ le centre de G (*i.e.* l'ensemble des éléments z de G qui commutent avec tous les éléments de G), par $\mathbb{O}_p(G)$ avec p premier, le plus grand p-sous-groupe normal de G, par $\mathcal{D}(G)$ le groupe des commutateurs ou *groupe dérivé* de G, par $\mathrm{F}(G)$ le *sous-groupe de Fitting* de G (*i.e.* le plus grand sous-groupe normal nilpotent de G) et enfin par $\mathrm{F}^*(G)$ le sous-groupe $\mathrm{F}(G)\mathrm{E}(G)$ où $\mathrm{E}(G)$ désigne le plus grand sous-groupe semi-simple de G. Rappelons enfin qu'un groupe G est *nilpotent de classe* 2 si le quotient $G/\mathrm{Z}(G)$ est abélien.

Soit g un élément d'un groupe G ; on appelle *fermeture normale* de g dans G le plus petit sous-groupe normal de G contenant g.

2) Par convention, l'inverse d'un élément g d'un groupe G sera noté $\bar{g}$ au lieu de g^{-1} dans le but d'alléger les formules ; la notation x^g, avec x et g dans

G, représente l'élément $\overline{g}xg$. Pour représenter le produit de deux groupes, nous suivrons les conventions de l'ATLAS [2] légèrement simplifiées ; soient A et B deux groupes :

- $A \times B$ désigne le produit direct de A et de B ;
- $A \rtimes B$ désigne le produit semi-direct, l'extension $1 \to A \to A \rtimes B \to B \to 1$ est scindée ;
- $A \cdot B$ désigne l'extension non scindée $1 \to A \to A \cdot B \to B \to 1$.

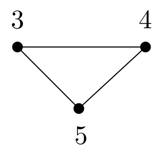
Quand la nature du produit n'est pas précisée nous utiliserons la notation $A \,.\, B$.

Si p est premier, p^n (avec n entier) désigne le groupe abélien élémentaire ; cette notation est utilisée dans les produits de groupes quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Par convention, les sommets d'un graphe de Coxeter représentant un ensemble de relations portant sur les éléments indexés x_i seront repérés par leur indice.

3) Le groupe $\mathbb{H}$ est le groupe dont $(x_3, x_4, x_5/\gamma_{\mathbb{H}})$, avec

$\gamma_{\mathbb{H}}$:

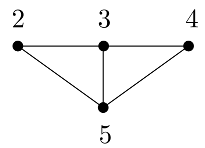


$$(x_3^{x_4} x_5)^3 = 1,$$

est une présentation ; c'est un groupe de 3-transpositions d'ordre 54 dont le centre d'ordre 3 est engendré par $(x_3x_4x_5)^2$. Pour plus de détails voir [5], [14].

4) Le groupe $\mathbb{I}$ est le groupe dont $(x_2, x_3, x_4, x_5/\gamma_{\mathbb{I}}, r(5))$, avec

$\gamma_{\mathbb{I}}$:



$$r(5) : \quad (x_2^{x_3} x_5)^3 = (x_3^{x_4} x_5)^3 = (x_2^{x_3x_4} x_5)^3 = 1\,,$$

est une présentation ; c'est un groupe de 3-transpositions d'ordre $2^8 3^8$. On pose :

$s := (x_3x_5x_4)^2$, $\qquad s' := (x_3x_5x_2)^2$,

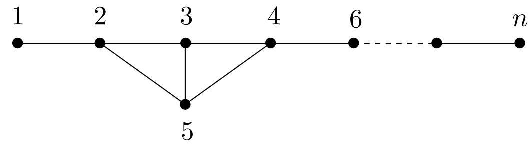
$t' := x_2^{\bar{s}}$ (on a aussi $t' = x_4^{s'}$), $\qquad t'' := x_2^{s}$ (on a aussi $t'' = x_4^{\bar{s}'}$),

$q := x_2x_4t't''$ (on a aussi $q = (s\bar{s}')^2$).

Le centre du groupe $\mathbb{I}$ est un sous-groupe d'ordre 2 engendré par l'élément q introduit ci-dessus ; q est le produit de quatre conjugués de x_2 commutant deux à deux (voir [4], [6], [9], [14]).

5) Étant donné un groupe G, on désigne par $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble générateur de cardinal n ; pour $n \geq 5$, $\gamma(n)$ est le graphe de Coxeter

$\gamma(n)$:



et $r(n)$ un ensemble de relations incluant les relations $r(5)$ données ci-dessus en 4).

Si G est un groupe de présentation $(X_n/\gamma(n), r(n))$, on pose :

$$Q := x_1^{qx_1} q, \quad Q' := x_6^{qx_6} q \quad \text{(notation 4).}$$

Le groupe $\mathrm{SU}(n,4)$ admet une présentation de cette forme, les relations $r(n)$ sont explicitées ci-dessous en 1.4.

1.3. Motivation. — Au cours de ces dernières années J. Hall et F. Zara ont étudié des problèmes voisins ; donnons brièvement un aperçu de leurs résultats.

Dans sa thèse, F. Zara étudie des groupes M sur lesquels opère un système de Fischer (G, X) de telle sorte que deux conditions, notées MG2 et MG3, soient satisfaites (voir [14], [15]) ; de tels groupes sont appelés des (G, X)-groupes. L'un des premiers résultats qu'il établit applicables aux groupes unitaires est le suivant :

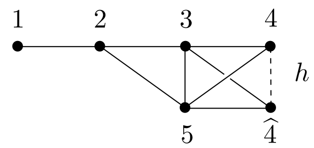
Soient G un groupe et M un module libre sur un anneau principal K qui soit un groupe sur lequel G opère. Soit $[G, M]$ le sous-groupe de M engendré par les sous-ensembles $[g, M] := \{g(m)\overline{m} \mid m \in M\}$, g parcourant G. Si le groupe G est de présentation $(X_n/\gamma(n), r(5))$ (avec $n \geq 5$), s'il existe un entier p tel que $[x_1, M] = \langle a_1 \rangle$ soit de rang p et si $M = [G, M]$, alors la donnée de deux matrices A et B de $\mathrm{GL}(p, K)$ satisfaisant à $A + A^{-1} + \mathrm{I} = B + B^{-1} + \mathrm{I} = AB^{-1} + BA^{-1} = 0$ permet de décrire complètement l'action des éléments x_j de X_n sur M.

Il prouve en outre l'existence d'un tel système de Fischer et démontre que G est fini si et seulement si $n = 5$: dans ce cas, G est isomorphe à $2 \times \mathrm{SU}(5, 4)$.

Ensuite, F. Zara étudie les formes bilinéaires sur M invariantes par certains groupes G et construit des extensions centrales $\widehat{M}$ de M qui sont des (G, X)-groupes, puis des extensions $\widehat{M} \rtimes G = \widehat{G}$. Il obtient, entre autres, une présentation du groupe $\widehat{G}_h = \widehat{M} \rtimes (2 \times \mathrm{SU}(5, 4))$, $h \in \mathbb{N}^*$; (avec les notations 1.2)

$$\widehat{G}_h = \big((X_5 \cup \widehat{x}_4)/\widehat{\gamma}(5), \widehat{r}(5), (\widehat{x}_4 x_1^{s'^{x_4 x_3}})^2 = 1\big)$$

$\widehat{\gamma}_h(5)$:



$(x_4\hat{x}_4)^h = 1,$

$$\widehat{r}_h(5) \begin{cases} r(5), \\ (\widehat{x}_4 y)^3 = 1 \quad \text{pour} \quad y \in \{x_3^{x_5}, x_5^{x_4}, x_4^{x_3}, x_3^{x_4x_5}, x_4^{x_5x_3}, x_5^{x_3x_4}\}, \\ (\widehat{x}_4 t')^2 = (\widehat{x}_4 t'')^2 = 1, \quad \widehat{x}_4^{x_3x_4s'x_4x_3} = \widehat{x}_4^s \end{cases}$$

et prouve que $\widehat{M}$ est nilpotent de classe 2 et $\mathcal{D}(\widehat{M})$ central dans $\widehat{G}_h$. Sous l'hypothèse $h = 2$ (resp. $h = 3$), la classe de conjugaison de x_2 est une classe de 3-transpositions de $\widehat{G}_h$ et l'on a $2\,h^{23}|\mathrm{PSU}(5,4)| = |\widehat{G}_h|$. Moyennant une relation supplémentaire, il obtient une présentation du D-centralisateur $\mathrm{DC}_7(d)$ d'une transvection unitaire d de $\mathrm{SU}(7,4)$ (voir [14]).

La situation étudiée par J. Hall est légèrement différente. Il se donne un groupe de 3-transpositions $\widetilde{G}$ tel que $\mathrm{Z}(\widetilde{G}) = 1$, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G}) = \mathrm{F}(\widetilde{G}) = \mathrm{F}^*(\widetilde{G})$. Le théorème de classification de Fischer de [2] permet de décrire le quotient $G = \widetilde{G}/\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$; $\widetilde{G}$ est donc obtenu comme une extension :

$$\text{(E)} \qquad 1 \to \mathbb{O}_2(\widetilde{G}) \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \to 1.$$

Dans cette situation, J. Hall détermine la structure de $\widetilde{G}$ (voir [5], [6]).

Énonçons le résultat qu'il obtient dans le cas où G est un groupe unitaire $\mathrm{SU}(n,4)$, $n \geq 5$ (groupe noté $\mathrm{SU}_n(2)$ par J. Hall)

1) Si G est isomorphe à $\mathrm{SU}(n,4)$ avec $n \neq 5$ et $n \neq 7$, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$ est une somme de copies du module naturel de G sur $\mathbb{F}_4$; l'extension (E) est scindée.

2) Si G est isomorphe à $\mathrm{SU}(5,4)$, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$ est un groupe abélien élémentaire ; comme G-module c'est une somme directe de copies du module naturel V_{10} de G sur $\mathbb{F}_4$ ou de l'extension non scindée de V_{10} par lui-même ; l'extension (E) est scindée.

3) Si G est isomorphe à $\mathrm{SU}(7,4)$, $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$ est un groupe abélien élémentaire ; c'est une somme directe de copies du module naturel de G sur $\mathbb{F}_4$. Pour chaque $\mathbb{O}_2(\widetilde{G})$, il y a exactement deux possibilités pour l'extension (E) l'une est scindée et l'autre non scindée.

Ainsi pour $n \geq 5$, ces résultats décrivent en particulier l'extension scindée

$$1 \to \mathrm{V} \longrightarrow \widetilde{G} \to \mathrm{SU}(n,4) \longrightarrow 1$$

où V désigne le module naturel de $\mathrm{SU}(n,4)$ sur $\mathbb{F}_4$; $\widetilde{G}$ est alors le D-centralisateur d'une transvection unitaire dans $\mathrm{SU}(n+2,4)$.

Dans la situation $n = 5$, J. Hall donne des présentations de ces groupes, retrouvant ainsi les résultats de F. Zara. De plus, il donne une présentation fischérienne des extensions non scindées $2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7,4)$ et $2 \times (2^{14} \cdot \mathrm{SU}(7,4))$ de