Bull. Soc. math. France
129 (2), 2001, p. 189–210

RELATIONS DE FUCHS POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS RÉGULIERS

par Eduardo Corel

Résumé. — Dans cet article, nous montrons que la notion analytique d'exposants développée par Levelt pour les systèmes différentiels linéaires en une singularité régulière s'interprète algébriquement en termes d'invariants de réseaux, relatifs à un réseau stable maximal que nous appelons « réseau de Levelt ». Nous obtenons en particulier un encadrement pour la somme des exposants des systèmes n'ayant que des singularités régulières sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Abstract (*Fuchs' relations for regular differential systems*). — In this article, we reinterpret A.H.M. Levelt's notion of exponents for linear differential systems at a regular singularity as eigenvalues of the residue of a regular connection on a maximal lattice (that we call "Levelt's lattice"). This allows us to establish upper and lower bounds for the sum of exponents for systems having only regular singularities on $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

La notion d'exposant pour une équation ou un système différentiels linéaires caractérise l'ordre de croissance des solutions en un point singulier régulier. Les résultats contenus dans cet article concernent une généralisation de la relation de Fuchs pour les équations différentielles au cas des systèmes différentiels.

Pour une équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)y = 0$$

Texte reçu le 27 janvier 2000, révisé le 11 juillet 2000

Eduardo Corel, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris (France) • *E-mail :* `corel@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 34A20, 34A30, 12H05, 34C20, 32S40.

Mots clefs. — Système différentiel, point singulier régulier, formes normales, connexion, réseau, exposants, réseau de Levelt, relation de Fuchs.

fuchsienne sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire à singularités régulières, la *relation de Fuchs* (*cf.* [Po], p. 77) relie les exposants $e_1^s, \ldots, e_n^s$, à savoir les ordres maximaux de croissance de n solutions indépendantes, en les points $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, par la formule

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^s - \frac{1}{2}n(n-1)\Big) = -n(n-1).$$

Pour un système différentiel d'ordre n

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = AX, \tag{1}$$

méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on dispose, en une singularité régulière s, d'une notion d'exposants définie par A.H.M. Levelt [Le1] comme celle des ordres de croissance maximaux $e_1^s, \ldots, e_n^s$ d'un système fondamental de solutions du système (1) par rapport à une valuation convenable. On les appellera les *exposants de Levelt* du système (1) en s.

Si les coefficients de la matrice A sont des fractions rationnelles, on définit la *hauteur* du système (1) comme la somme de ses *rangs de Poincaré*

$$h(A) = \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sup(0, -\mathrm{ord}_s A dz - 1),$$

où ord_s désigne l'ordre d'une fonction, éventuellement à valeurs matricielles. Nous démontrons alors le résultat suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathrm{d}X/\mathrm{d}z = AX$ *un système différentiel à singularités régulières sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *et soient* $e_1^s, \ldots, e_n^s$ *les exposants de Levelt associés à ce système en les points* $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. *La somme des exposants vérifie alors*

$$-\frac{1}{2}n(n-1)h(A) \le \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sum_{i=1}^{n} e_i^s \le -h(A).$$

L'inégalité de droite précise un résultat d'A.A. Bolibrukh ([Bo3], prop. 1.2.3, p. 24), qui montre que sous les mêmes hypothèses

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sum_{i=1}^{n} e_i^s \le 0.$$

Si le système n'a que des pôles simples, on a $h(A) = 0$, et l'on retrouve la caractérisation de Bolibrukh des systèmes *fuchsiens* par la propriété

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sum_{i=1}^{n} e_i^s = 0.$$

La double inégalité ci-dessus repose sur une étude algébrique locale des singularités régulières. En notant K le corps local valué $\mathbb{C}((z))$, et $\mathcal{O}$ son anneau de valuation $\mathbb{C}[[z]]$, nous parlerons d'un système d'ordre n

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = AX,$$

où $A \in \mathrm{M}_n(K)$, comme l'expression dans une base donnée (e) d'un K-espace vectoriel à connexion (V, ∇), de dimension n, de l'équation

$$\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}z}(v) = 0,$$

où $\nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}z}$ désigne la contraction de ∇ avec la dérivation usuelle $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ (*cf.* [G-L], p. 164). Les *transformations de jauge*

$$A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z},$$

où $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ est une matrice non singulière correspondant au changement d'inconnue $X = PY$, s'interprètent alors comme des *changements de base* dans V. Rechercher une jauge *holomorphe* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ revient à respecter une structure supplémentaire de *réseau*, c'est-à-dire la structure de $\mathcal{O}$-module engendré par la base (e). Au lieu de caractériser la singularité régulière en termes de croissance modérée des solutions du système, nous nous servirons de l'existence d'un réseau M de V stable sous l'action de l'opérateur $\nabla_{z\mathrm{d}/\mathrm{d}z}$ (*cf.* [Ka], p. 211).

À la notion analytique d'exposants de Levelt correspond par cette traduction une notion algébrique, que nous obtenons en utilisant les décompositions suivantes de matrices fondamentales. Si le système différentiel (1), supposé holomorphe en $z = 0$, y admet une singularité régulière, il existe une matrice fondamentale $\mathcal{Y}$ de solutions du système sous la forme

$$\mathcal{Y} = \Omega z^N z^L$$

où :

- Ω est une matrice $n \times n$ non singulière, holomorphe sur un germe de disque D de centre $z = 0$;
- $N = \mathrm{diag}(N_1, \ldots, N_n)$ est une matrice diagonale d'entiers ordonnés par ordre décroissant ;
- L est une matrice constante triangulaire supérieure, dont les valeurs propres appartiennent au sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in [0, 1[\}$ de $\mathbb{C}$.

En considérant les résidus en 0 dans la relation de Liouville

$$\frac{\mathrm{d}(\det \mathcal{Y})}{\mathrm{d}z} = (\mathrm{Tr}\, A) \det \mathcal{Y},$$

on obtient, à l'aide des décompositions ci-dessus, l'équation

$$\mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A = \mathrm{ord}_0 \det \Omega + \mathrm{Tr}\, N + \mathrm{Tr}\, L. \tag{2}$$

Le premier à avoir considéré ce type d'écriture est F.R. Gantmacher qui, en 1947 (voir [G], chap. XIV, §10, p. 143 *seq.*), a montré que, sous l'hypothèse que la matrice A est à pôle simple, on peut supposer que la matrice Ω est inversible à coefficients holomorphes. L'entier $\mathrm{ord}_0 \det \Omega$ est alors nul, et les nombres $N_i + L_{ii}$ sont les valeurs propres du résidu A_{-1} de la matrice du système.

Dans [Le1], A.H.M. Levelt montre qu'il existe une telle écriture qui vérifie $N_i + L_{ii} = e_i^0$, connue sous le nom de *forme normale de Levelt*. En remarquant que $\sum_{i=1}^n e_i^0 = \mathrm{Tr}\, N + \mathrm{Tr}\, L$, on en déduit la relation

$$\mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A = \mathrm{ord}_0 \det \Omega + \sum_{i=1}^{n} e_i^0. \tag{3}$$

On voit alors, par le théorème des résidus, que généraliser la relation de Fuchs revient à évaluer l'ordre $\mathrm{ord}_s \det \Omega$ du déterminant de la transformation de jauge Ω en tout $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Nous montrons que le nombre $\mathrm{ord}_0 \det \Omega$ s'interprète algébriquement comme la dimension $[\Lambda : \Lambda_L]$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel Λ/Λ_L, où Λ est le réseau engendré par la base (e) dans laquelle on a exprimé le système, et Λ_L est un autre réseau que nous appelons le *réseau de Levelt* de Λ. Cette notion, qui semble dépendre de la matrice Ω, ne dépend en fait que de la classe d'équivalence holomorphe du système.

Le réseau Λ_L se caractérise algébriquement de la façon très simple suivante.

PROPOSITION. — *Λ_L est le plus grand réseau de V stable sous $\nabla_{z\mathrm{d}/\mathrm{d}z}$ et contenu dans Λ.*

De ce fait, l'entier $[\Lambda : \Lambda_L]$ est minimal parmi ceux des réseaux stables contenus dans Λ, et la différence entre $\mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A$ et $\sum_{i=1}^n e_i^0$ la plus petite possible.

L'utilité du réseau de Levelt tient au résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Les exposants de Levelt du système* (1) *sont les valeurs propres du résidu de la connexion ∇ pour le réseau de Levelt associé.*

Ce résultat constitue la caractérisation algébrique des exposants de Levelt évoquée plus haut, et permet de faire le rapprochement entre la construction de Levelt et les résultats obtenus antérieurement par Gantmacher dans le cas d'un pôle simple.

Dans une première partie, nous rappelons des propriétés algébriques essentielles des réseaux des K-espaces vectoriels à connexion. Nous définissons ensuite le réseau de Levelt, dont nous majorons les invariants grâce à la première partie. Nous établissons enfin le théorème 2 ainsi que les inégalités de Fuchs.

1. Réseaux des espaces vectoriels à connexion

Pour plus de détails sur les notions que nous présentons dans ce paragraphe, nous renvoyons à [G-L].

Soit $K = \mathbb{C}((z))$ le corps des séries méromorphes formelles, muni de la dérivation $\theta = z\mathrm{d}/\mathrm{d}z$, soient $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ l'anneau de valuation de K pour la valuation z-adique v, et $\Omega^1_{K|\mathbb{C}}$ le K-espace vectoriel des 1-formes différentielles sur $\mathbb{C}$.

On désigne par V un K-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une connexion
$$\nabla : V \longrightarrow V \otimes_K \Omega^1_{K|\mathbb{C}}.$$
Pour toute $\mathbb{C}$-dérivation ∂ de K, on note ∇_∂ l'opérateur différentiel de V correspondant
$$\begin{aligned}\nabla_\partial : V &\longrightarrow V,\\ v &\longmapsto \langle \nabla v, \partial\rangle.\end{aligned}$$

On appelle *matrice de l'opérateur différentiel* ∇_∂ dans une base (e) de V, la matrice $A = (A_{i,j})$, notée également $\mathrm{Mat}(\nabla_\partial, (e))$, définie par la formule
$$\nabla_\partial(e_j) = -\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} e_i$$
pour $j = 1, \ldots, n$, où l'on désigne par e_i le i-ème vecteur de la base (e).

Pour une autre base (ε) de V, la matrice $\mathrm{Mat}(\nabla_\partial, (\varepsilon)) = A_{[P]}$ est donnée par la transformation *de jauge*
$$A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\partial(P), \tag{4}$$
où $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ est la matrice de passage de (e) à (ε). Un *réseau* de V est par définition un $\mathcal{O}$-module Λ engendré par une base de V.

Si (e) est une base de V, on note $\mathcal{R}(e)$ le réseau engendré par (e), et l'on dit que (e) est une ($\mathcal{O}$-)base de $\mathcal{R}(e)$.

LEMME 1.1. — *Soit Λ un réseau de V. Pour tout K-automorphisme φ de V, l'image $\varphi(\Lambda)$ de Λ est un réseau, et l'on a $\varphi(\Lambda) \subset \Lambda$ (resp. $\varphi(\Lambda) = \Lambda$) si et seulement s'il existe une base (e) de Λ telle que $\mathrm{Mat}(\varphi, (e)) \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ (resp. $\mathrm{Mat}(\varphi, (e)) \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$). Cette dernière condition est alors vérifiée pour toute base (e) de Λ.*

Nous rappelons que la connexion ∇ est dite *régulière* s'il existe un réseau stable sous l'action de ∇_θ.

LEMME 1.2. — *Pour tout réseau Λ de V les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Λ est stable sous l'action de ∇_θ ;*

(ii) *il existe une $\mathcal{O}$-base (e) de Λ telle que la matrice $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (e))$ soit à coefficients dans $\mathcal{O}$;*

(iii) *pour toute $\mathcal{O}$-base (e) de Λ, la matrice $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (e))$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$.*