

ENLACEMENTS D'INTERVALLES ET TORSION DE WHITEHEAD

PAR JEAN-YVES LE DIMET

RÉSUMÉ. — Soit E un enlacement de n intervalles dans $D^2 \times I$ d'extérieur X et soit $X_0 = X \cap D^2 \times 0$. On utilise la propriété de la paire (X, X_0) d'être Λ -acyclique pour certaines représentation ρ de l'anneau du groupe fondamental π de X dans un anneau Λ pour construire des invariants de torsion à valeurs dans le groupe $K_1(\Lambda)/\rho(\pm\pi)$. Un cas particulier est le polynôme d'Alexander en n variables quand Λ est l'anneau des fractions rationnelles P/Q avec $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$ et ρ est simplement l'abélianisation.

ABSTRACT (*String links and Whitehead torsion*). — Let E be a n -component string link in $D^2 \times I$ with exterior X and $X_0 = X \cap D^2 \times 0$. Then the pair (X, X_0) is $\mathbb{Z}$ -acyclic and, given a representation $\rho : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \Lambda$, with $\pi = \pi_1(X)$, we use the property that this pair is Λ -acyclic for various representations ρ and rings Λ to construct torsion invariants for string links taking their values in the group $K_1(\Lambda)/\rho(\pm\pi)$. A particular case is the Alexander polynomial in n variables when Λ is the ring of rational fractions P/Q with $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$ and ρ is simply the abelianization map.

Introduction

Soit $k \subset S^3$ un nœud classique, soit X le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de k et soit $m \subset \partial X$ un méridien de k . Alors la paire de complexes finis (X, m) est $\mathbb{Z}[t]$ -acyclique (*i.e.* l'inclusion de m dans X induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}[t]$) et J. Milnor démontre

Texte reçu le 6 mars 2000, accepté le 4 juillet 2000

JEAN-YVES LE DIMET, Département de Mathématiques et L.M.P., Université Blaise Pascal,
63177 Aubière CEDEX (France) • *E-mail* : `jledimet@ucfma.univ-bpclermont.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 19B28, 57M25, 57Q10.

Mots clefs. — Nœuds, enlacements d'intervalles, torsion de Whitehead.

dans [12] que le polynôme d'Alexander de k n'est autre que la torsion de Reidemester de la paire (X, m) . Plus tard, dans un article fondamental [13] sur la torsion de Whitehead, J. Milnor fait la remarque suivante :

Soit (K, L) une paire de complexes finis connexes, soit π le groupe fondamental de K et soit $\tilde{C}$ le $\mathbb{Z}[\pi]$ -complexe de chaînes engendré — en tant que groupe abélien libre — par les cellules relatives de $(\tilde{K}, \tilde{L})$ où $\tilde{K}$ est le revêtement universel de K et $\tilde{L}$ sa restriction à L . Si l'inclusion de L dans K est une équivalence d'homotopie, alors $\tilde{C}$ est acyclique et l'on sait définir la torsion τ de (K, L) — c'est un élément du groupe de Whitehead $Wh(\pi)$. Mais, plus généralement, supposons que l'on dispose d'une représentation h du groupe π dans $O(p)$ (par exemple) de telle sorte que $\tilde{C} \otimes_{\pi} \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ soit acyclique, alors la torsion τ_h du complexe précédent est un élément bien défini de $\tilde{K}_1(\mathbb{R})$ et Milnor note que “*The real interest lies rather in the fact that τ_h may be defined even when τ is not*”.

Cette remarque, appliquée aux enlacements d'intervalles, est le fondement de cet article. Rappelons qu'un *enlacement de n intervalles* — ou *n -enlacement* pour abrégé — ressemble à une tresse pure à n brins contenue dans $D^2 \times I$, mais on n'exige pas que la fonction cote des brins soit croissante, voir ci-après et aussi [8], [9], [11]. Les n -enlacements se composent comme les tresses et forment un monoïde que l'on note $\mathcal{E}(n)$. Ainsi, $\mathcal{E}(1)$ est isomorphe au monoïde des nœuds classiques. Considérons maintenant un enlacement E de n intervalles. Soit X le complémentaire dans D^2 d'un voisinage tubulaire ouvert des brins, soit $X_0 = X \cap D^2 \times 0$ et soit π le groupe fondamental de X . Supposons que l'on connaisse une représentation ρ de π dans un sous-groupe G du groupe des unités d'un anneau Λ de sorte que la paire (X, X_0) soit Λ -acyclique. Alors, on peut associer à E la torsion $\tau(X, X_0)$ qui est un élément bien défini de $K_1(\Lambda)/\text{Im}(\pm G)$. Cependant, cette torsion n'est pas vraiment un invariant d'enlacements car elle est fonction de la représentation ρ du groupe fondamental de X . Pour remédier à ce problème on introduit, dans cet article, la notion de *représentation universelle* pour les n -enlacements. On donne une condition suffisante pour qu'une représentation soit universelle, puis dans une deuxième partie, on étudie diverses applications de cette notion. Par exemple, l'abélianisation du groupe fondamental est une représentation universelle : on retrouve ainsi le polynôme d'Alexander à n indéterminées introduit dans [8].

1. Représentations acycliques et torsion d'un enlacement d'intervalles

1.1. Représentation acycliques. — Soient π un groupe, $A = \mathbb{Z}[\pi]$ l'anneau de ce groupe et $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Z}$ l'augmentation.

Deux bases $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_q)$ d'un A -module libre de type fini M seront dites *équivalentes* s'il existe des éléments $g_1, g_2, \dots, g_q$ de π tels que

$$(e_1, e_2, \dots, e_q) = (\pm g_1 e'_1, \pm g_2 e'_2, \dots, \pm g_q e'_q)$$

à l'ordre près. Considérons maintenant un A -module différentiel gradué

$$C_* : \dots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

ayant les propriétés suivantes :

- 1) les C_n sont des A -modules libres de type fini ;
- 2) il existe un entier N tel que $C_n = 0$ si $n > N$;
- 3) chacun des C_n est muni d'une classe d'équivalence de bases

Si C_* est acyclique, la *torsion* $\tau(C_*)$ est un élément bien défini du groupe de Whitehead de π , $Wh(\pi) = K_1(A)/\pm \pi$, voir [13], [14]. On cherche, plus généralement, à construire des invariants en K -théorie pour des A -modules différentiels gradués non nécessairement acycliques. Dans ce but, on introduit les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.1. — 1) On dira qu'un A -module différentiel gradué C_* est un *A -module (différentiel gradué) de Whitehead* si C_* possède les propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus et si, de plus, $C_* \otimes \mathbb{Z}$ est acyclique.

2) Soit B un anneau unitaire ayant la propriété d'invariance de la dimension (*i.e.* : B^p isomorphe à B^q implique $p = q$). On dira qu'un morphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow B$ est une *représentation acyclique de A* si $C_* \otimes_A B$ est acyclique pour tout module de Whitehead C_* .

3) Soit $\rho : A \rightarrow B$ une représentation acyclique de A . On dira que le groupe $K_\rho(B) = K_1(B)/\rho(\pm \pi)$ est le *groupe de Milnor* de la représentation ρ . Dans la suite, la loi de composition de ce groupe sera notée multiplicativement.

4) Soit C_* un A -module de Whitehead et soit ρ est une représentation acyclique de A . La ρ -torsion de C_* est $\tau_\rho(C_*) = \tau(C_* \otimes_A B) \in K_\rho(B)$.

Le résultat ci-dessous est très utile pour la suite de cet article. C'est une conséquence simple d'un théorème de P. Vogel.

PROPOSITION 1.2. — Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux tel que, pour toute matrice u à coefficients dans A ,

$$u \otimes \mathbb{Z} \text{ inversible} \implies u \otimes B \text{ inversible.}$$

Alors ρ est une représentation acyclique de A .

Démonstration. — Rappelons (voir [15], section 6) qu'un A -module (à gauche) M est dit *local* si pour toute $p \times p$ matrice u à coefficients dans A telle que $u \otimes \mathbb{Z}$ soit inversible, $u^* : \text{Hom}(A^p, M) \rightarrow \text{Hom}(A^p, M)$ est un isomorphisme.

Notons A_ε le *localisé* au sens de Cohn [4] de l'augmentation

$$\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Soit C_* un module de Whitehead. Alors :

- a) $C_* \otimes A_\varepsilon$ est acyclique, (voir [15], th. 1.13) ;
- b) si M est local, l'application canonique $M \rightarrow A_\varepsilon \otimes M$ est un isomorphisme, (voir [15], cor. 1.19).

Si M est local, on voit que $C_* \otimes M$ est acyclique en raison de l'isomorphisme : $C_* \otimes M \simeq C_* \otimes A_\varepsilon \otimes M$. Il suffit donc de vérifier que B est un A -module local. Mais si u une matrice $p \times p$ à coefficients dans A , la matrice $u^* : \text{Hom}(A^p, B) \rightarrow \text{Hom}(A^p, B)$ n'est autre que la transposée de $u \otimes B$. $\square$

REMARQUE 1.3. — 1) On suppose que C_* est un A -module de Whitehead qui se réduit à

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow 0.$$

Si ρ est une représentation acyclique de A , la ρ -torsion de C_* est la torsion de l'isomorphisme $\partial_n \otimes B$ ou de son inverse, selon la parité de n . Plus précisément (voir [14]),

$$\tau_\rho(C_*) = \tau(\partial_n \otimes B)^{(-1)^n}.$$

2) Soit Λ un anneau commutatif et soit $\varphi : \pi \rightarrow \text{SL}_q(\Lambda)$ une représentation du groupe π de sorte que la représentation $\rho : A \rightarrow \mathcal{M}_q(\Lambda)$, définie par

$$\rho\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i \varphi(g_i),$$

soit acyclique. Alors le groupe de Milnor $K_\rho(\mathcal{M}_q(\Lambda))$ n'est autre que $K_1(\Lambda)$ si q est pair, $K_1(\Lambda)/\pm 1$ si q est impair, car d'une part $K_1(\mathcal{M}_q(\Lambda))$ est isomorphe à $K_1(\Lambda)$ (équivalence de Morita [5], [14]) ; d'autre part l'image du groupe π par ρ est contenue dans $\text{SL}_q(\Lambda)$, donc dans le groupe dérivé de $\text{GL}(\Lambda)$.

3) Pour une large classe d'anneaux commutatifs, la torsion d'un isomorphisme $\alpha \in \text{GL}(\Lambda)$ n'est autre que le déterminant de α , voir [14] par exemple. Dans la conjonction de ce cas et des cas 1) et 2) décrits ci-dessus, la ρ -torsion de

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow 0$$

est l'image dans Λ^* ou $\Lambda^*/\pm 1$ de $\det(\partial_n \otimes \mathcal{M}_q(\Lambda))^{(-1)^n}$ (où Λ^* désigne le groupe des unités de Λ).

Soit maintenant (K, L) une paire de complexes cellulaires finis connexes, soient π le groupe fondamental de K et $A = \mathbb{Z}[\pi]$. On note $C_*(K, L; A)$ le A -module différentiel gradué engendré (comme $\mathbb{Z}$ -module) par les cellules relatives de $(\tilde{K}, \tilde{L})$ où $\tilde{K}$ est le revêtement universel de K et $\tilde{L}$ sa restriction à L . On suppose que l'inclusion $L \rightarrow K$ induit un isomorphisme en homologie entière. Alors $C_*(K, L; A)$ est clairement un A -module de Whitehead. Si de plus $\rho : A \rightarrow B$ est une représentation acyclique de A , on peut considérer la ρ -torsion de (K, L) : c'est

$$\tau_\rho(K, L) = \tau(C_*(K, L; A) \otimes B) \in K_\rho(B).$$

Il résulte de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead [2] que :

PROPOSITION 1.4. — *La ρ -torsion de (K, L) est un invariant topologique.*

Démonstration. — Soit $f : (K, L) \rightarrow (K', L')$ un homéomorphisme. On peut, sans changer la torsion de Whitehead, supposer que f est cellulaire et remplacer (K', L') par le cylindre de f . Des suites exactes de modules différentiels gradués acycliques

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow C(L', L; B) \rightarrow C(K', L; B) \rightarrow C(K', L'; B) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow C(K, L; B) \rightarrow C(K', L; B) \rightarrow C(K', K; B) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

on déduit que (voir [13], th. 3.1) :

$$\tau_\rho(K', L) = \tau_\rho(L', L) \cdot \tau_\rho(K', L') \quad \text{et} \quad \tau_\rho(K', L) = \tau_\rho(K, L) \cdot \tau_\rho(K', K).$$

Mais les torsions de Whitehead de (K', K') et (L', L) sont triviales car tout homéomorphisme est une équivalence d'homotopie simple.

A fortiori, $\tau_\rho(K', K) = \tau_\rho(L', L) = 1$. Ainsi, $\tau_\rho(K', L') = \tau_\rho(K, L)$. $\square$

1.2. Enlacements d'intervalles. — Soit n un entier strictement positif et soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des points appartenant à l'intérieur du disque D^2 , fixés une fois pour toute.

Un *enlacement de n intervalles* E (ou tresse généralisée à n brins) est la donnée d'un plongement transverse au bord $f : \{1, 2, \dots, n\} \times I \rightarrow D^2 \times I$ tel que $f(i, t) = (a_i, t)$ pour $t = 0, 1$ et $i = 1, 2, \dots, n$. Dans la suite, l'expression *enlacement de n -intervalles* sera abrégée en *n -enlacement*.

Les classes d'isotopie des n -enlacements se composent (à la façon des tresses) pour former un monoïde que l'on note $\mathcal{E}(n)$. Ce monoïde contient le groupe P_n des tresses pures. Pour obtenir plus de détails on pourra consulter [9] ou [11].

Soit donc E un n -enlacement quelconque. On note X le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de l'image de f dans $D^2 \times I$: on dit que X est *l'extérieur de l'enlacement* E . On pose encore

$$X_t = (D^2 \times t) \cap X$$