

FONCTEURS POLYNOMIAUX ET FONCTEURS DE MACKEY NON LINÉAIRES

PAR HANS-JOACHIM BAUES, WINFRIED DRECKMANN,
VINCENT FRANJOU & TEIMURAZ PIRASHVILI

RÉSUMÉ. — On décrit les foncteurs polynomiaux, des groupes abéliens libres vers les groupes abéliens, comme des diagrammes de groupes abéliens dont on explicite les relations.

ABSTRACT (*Polynomial functors and nonlinear Mackey functors*)

Polynomial functors from free abelian groups to abelian groups are described explicitly in the form of diagrams of abelian groups, that are maps between the cross-effects of the polynomial functor which satisfy a list of relations. The key is to use an appropriate notion of Mackey functor from the category of finite sets and surjections.

Soient $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens, et $F(\mathbb{Z})$ sa sous-catégorie pleine dont les objets sont les groupes abéliens libres de type fini. On sait que la catégorie des foncteurs additifs de $F(\mathbb{Z})$ vers $\mathcal{A}b$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{A}b$.

Texte reçu le 25 avril 2000, accepté le 25 septembre 2000

HANS-JOACHIM BAUES, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn (Germany) • *E-mail* : baues@mpim-bonn.mpg.de

WINFRIED DRECKMANN, Schlatwieske 26, 48282 Emsdetten, Germany
E-mail : WD@lidingo.mail.telia.com

VINCENT FRANJOU, UMR 6629 UN/CNRS, Université de Nantes, Département de mathématiques, 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes CEDEX 3 (France)
E-mail : franjou@math.univ-nantes.fr

TEIMURAZ PIRASHVILI, A.M. Razmadze Mathematical Institute, Aleksidze str. 1, Tbilisi 380093 (Republic of Georgia) • *E-mail* : pira@mpim-bonn.mpg.de

Classification mathématique par sujets (2000). — 18D, 20C12, 20C30, 20G05, 55U, 55P15.
T.P. : bourse INTAS-93-2618-Ext, membre du réseau TMR “K-theory and algebraic groups”
ERB FMRX CT-97-010.

En fait, un foncteur additif $T : F(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A}b$ est entièrement déterminé par sa valeur sur $\mathbb{Z}$, et le foncteur T est isomorphe au produit tensoriel par $T(\mathbb{Z})$:

$$T \cong (-) \otimes T(\mathbb{Z}).$$

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ la catégorie de tous les foncteurs de $F(\mathbb{Z})$ vers $\mathcal{A}b$ qui s'annulent en 0. Pour un entier positif n , on désigne par $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ dont les objets sont les foncteurs polynomiaux de degré inférieur ou égal à n au sens d'Eilenberg et Mac Lane [6] (voir § 1). Quand n vaut 1, il s'agit des foncteurs additifs, et l'on vient d'expliquer que la catégorie $\mathcal{P}_1(\mathbb{Z})$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{A}b$. Une description de la catégorie $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z})$ a été obtenue par H. Baues [2]. Elle est équivalente à la catégorie des diagrammes de groupes abéliens

$$M_e \xrightarrow{H} M_{ee} \xrightarrow{P} M_e$$

vérifiant les relations $PHP = 2P$ et $HPH = 2H$. La correspondance s'effectue à partir d'un foncteur quadratique T en posant

$$M_e = T(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad M_{ee} = T(\mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}).$$

Le but principal de cet article est de décrire les catégories $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ en termes simples, et de les présenter comme catégories de diagrammes de groupes abéliens.

On peut consulter [2] pour une interprétation homotopique des foncteurs quadratiques. Signalons aussi que les groupes d'extensions dans les catégories de foncteurs sont accessibles au calcul, et admettent des interprétations très riches au-delà même de l'article [9]. Pour une généralisation de nos résultats et des applications aux algèbres de Schur, on pourra consulter [7].

Nous terminons cette introduction par la description de nos résultats. Nous commencerons par généraliser la notion de degré d'un foncteur polynomial (§ 1). Pour les besoins de l'article, il nous suffit de considérer les foncteurs, vers la catégorie des groupes abéliens, dont la catégorie source possède un objet nul et admet des coproduits finis. C'est bien sûr le cas de la catégorie $F(\mathbb{Z})$, mais c'est aussi le cas de la catégorie des monoïdes commutatifs libres de type fini, catégorie que l'on désignera par $F(\mathbb{N})$. Ces deux catégories sont reliées par le foncteur de complétion en groupe de Grothendieck ; par précomposition, on obtient un foncteur :

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N})$$

(la notation au but se comprend d'elle-même) qui n'est pas une équivalence de catégorie, mais qui le devient une fois restreint aux sous-catégories des foncteurs polynomiaux (§ 8). La description de $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ s'obtient d'un résultat plus général concernant la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Cette dernière est en effet équivalente à la catégorie des foncteurs de Mackey [5] des ensembles finis vers les groupes abéliens. On cherche alors à appliquer le théorème principal de [12] (voir § 2). Il s'agit de simplifier un foncteur défini sur les ensembles finis en un foncteur

défini sur les seules surjections. L'énoncé du résultat réclame que l'on dispose de la notion de foncteur de Mackey dans le cas des seules surjections entre ensembles finis, notion que l'on définit ci-dessous (et au § 5).

Dans cet article, un *foncteur de Janus* M d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{A}$ est la donnée d'un foncteur covariant M_* et d'un foncteur contravariant M^* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}$ qui coïncident sur les objets (pour Dress [5], c'est un bifoncteur, terme que nous réservons à un foncteur de deux variables; l'expression "foncteur de Janus" est due à B. Richter).

Soit Ω la catégorie des ensembles finis non-vides et des surjections.

DÉFINITION 0.1. — Un foncteur de Janus M , de Ω vers $\mathcal{A}b$, est un *foncteur de Mackey* si il vérifie la condition suivante : pour tout diagramme dans Ω ,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{G} & T \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ S & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

qui est un carré cartésien d'ensembles, on a, dans le groupe $\text{Hom}(M(S), M(T))$,

$$(M) \quad M^*(f)M_*(g) = \sum M_*(g')M^*(f')$$

où la somme s'effectue sur les sous-ensembles X de U tels que les restrictions f' et g' de F et G à X restent des surjections.

On peut maintenant énoncer nos principaux résultats.

THÉORÈME 0.2. — La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ de tous les foncteurs, de la catégorie $F(\mathbb{N})$ des monoïdes commutatifs libres de type fini vers $\mathcal{A}b$, qui envoient 0 sur 0, est équivalente à la catégorie des foncteurs de Mackey, de la catégorie Ω des surjections entre ensembles finis vers $\mathcal{A}b$.

THÉORÈME 0.3. — Soit n un entier positif. La catégorie $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ des foncteurs de degré inférieur ou égal à n , de la catégorie $F(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens libres de type fini vers abéliens $\mathcal{A}b$, est équivalente à la catégorie des foncteurs de Mackey, de Ω vers $\mathcal{A}b$, qui s'annulent sur les ensembles ayant plus de n éléments.

Le dernier paragraphe explicite une présentation des catégories $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$.

Remerciements. — Les premier et quatrième auteurs remercient l'Université de Nantes pour son hospitalité.

1. Foncteurs polynomiaux

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie qui possède un objet nul, noté 0, et qui admet des coproduits finis. On note

$$i_1 : X \longrightarrow X \vee Y, \quad i_2 : Y \longrightarrow X \vee Y$$

les inclusions de deux objets dans leur coproduit, et

$$r_1 = (1_X, 0) : X \vee Y \longrightarrow X, \quad r_2 = (0, 1_Y) : X \vee Y \longrightarrow Y$$

les rétractions.

Pour tout foncteur F de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{Ab}$ tel que $F(0) = 0$, sa déviation, ou *seconde déviation*, est le foncteur de deux variables défini sur un couple (X, Y) par :

$$F(X \mid Y) := \text{Ker}\left(F(X \vee Y) \xrightarrow{(r_1, r_2)} F(X) \times F(Y)\right).$$

Comme le morphisme de projection $(r_{1*}, r_{2*}) : F(X \vee Y) \rightarrow F(X) \times F(Y)$ admet une section donnée par $(x, y) \mapsto i_{1*}(x) + i_{2*}(y)$, la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow F(X \mid Y) \longrightarrow F(X \vee Y) \longrightarrow F(X) \times F(Y) \rightarrow 0$$

est scindée et on a un isomorphisme naturel en (X, Y) :

$$F(X \vee Y) \cong F(X) \oplus F(Y) \oplus F(X \mid Y).$$

Pour définir la *troisième déviation*, on peut alors considérer $F(X \mid Y)$ comme un foncteur en X , et en prendre la déviation. On définit par itération les *déviation d'ordre supérieur*. On vérifie que la n -ième déviation d'un foncteur F est :

$$F(X_1 \mid \cdots \mid X_n) = \text{Ker}\left(F(X_1 \vee \cdots \vee X_n) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n F(X_1 \vee \cdots \vee \hat{X}_i \cdots \vee X_n)\right).$$

Un *foncteur polynomial* est un foncteur dont l'une des déviations est nulle.

On dit qu'un foncteur est *de degré n* si sa $(n+1)$ -ième déviation est nulle, mais pas sa n -ième.

2. Un théorème de Dold-Kan pour les Γ -groupes abéliens

On énonce dans ce paragraphe le résultat démontré dans [12]. Ici, et dans tout l'article, on considère deux catégories dont les objets sont des ensembles finis. La catégorie Γ est la catégorie des ensembles finis pointés. Pour un entier positif n , on notera $[n]$ l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$ basé en 0. On convient que la somme $[1] \vee \cdots \vee [1]$ de n copies de $[1]$ égale $[n]$. La catégorie Ω est plus simplement la catégorie des ensembles finis non vides et des surjections. On notera $\underline{n}$ l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Si T est un Γ -groupe abélien, c'est-à-dire un foncteur

$$T : \Gamma \longrightarrow \mathcal{Ab}$$

tel que $T([0]) = 0$, on définit un foncteur

$$\text{cr}(T) : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}b$$

de la manière suivante. La valeur de $\text{cr}(T)$ sur l'objet $\underline{n}$ est celle de la n -ième déviation de T en $([1], \dots, [1])$:

$$\text{cr}(T)(\underline{n}) := T([1] \mid \dots \mid [1]).$$

C'est un sous-groupe de $T([1] \vee \dots \vee [1]) = T([n])$. Pour une surjection $f : \underline{n} \rightarrow \underline{m}$, on définit $\text{cr}(T)(f)$ de la manière suivante. Soit $f_0 : [n] \rightarrow [m]$ l'unique extension de f . On voit que l'image de $\text{cr}(T)(\underline{n})$ dans $T([m])$ par le morphisme $(f_0)_* : T([n]) \rightarrow T([m])$ est contenue dans $\text{cr}(T)(\underline{m})$. On prend pour $\text{cr}(T)(f)$ le morphisme induit par restrictions de $(f_0)_*$.

THÉOREME 2.1. — *La correspondance $T \mapsto \text{cr}(T)$ définit une équivalence de catégorie :*

$$\text{cr} : \mathcal{A}b^\Gamma \longrightarrow \mathcal{A}b^\Omega.$$

La formule

$$T([m]) = \bigoplus_{\mu \subset \underline{m}} \text{cr}(T)(\underline{|\mu|})$$

où $|\mu|$ désigne le cardinal d'un sous-ensemble μ de $\underline{m}$, nous dit comment décrire un quasi-inverse pour le foncteur cr . Si T désigne cette fois un foncteur de Ω vers $\mathcal{A}b$, on définit pour tout entier m positif non nul

$$i_!(T)([m]) = \bigoplus_{\mu \subset \underline{m}} T(\underline{|\mu|}),$$

et pour une application pointée $f : [m] \rightarrow [n]$, on définit

$$i_!T(f) : i_!T([m]) \longrightarrow i_!T([n])$$

comme le morphisme dont la restriction à un facteur $T(\underline{|\mu|})$ est nulle si 0 est dans l'image $f(\mu)$ et est le morphisme

$$f_* : T(\underline{|\mu|}) \longrightarrow T(\underline{|f(\mu)|}) \subset i_!T([n])$$

induit par f si 0 n'est pas dans $f(\mu)$.

On constate que *les foncteurs de Γ vers $\mathcal{A}b$ de degré inférieur ou égal à n correspondent, sous cette équivalence, exactement aux foncteurs de Ω vers $\mathcal{A}b$ qui s'annulent sur les ensembles ayant plus de n éléments.*

Concluons ce paragraphe en indiquant qu'une version contravariante de ce résultat est valide : la correspondance $T \mapsto \text{cr}(T)$ définit aussi une équivalence de catégorie

$$\text{cr} : \mathcal{A}b^{\Gamma^{\text{op}}} \longrightarrow \mathcal{A}b^{\Omega^{\text{op}}}.$$