

SUR CERTAINS PSEUDOGROUPES DE BIHOLOMORPHISMES LOCAUX DE $(\mathbb{C}^n, 0)$

PAR MICHEL BELLIART

RÉSUMÉ. — On montre que si Γ est un pseudogroupe de transformations locales holomorphes de $\mathbb{C}^n$ en zéro contenant deux éléments “en position générale” et proches de l’identité, alors : 1) L’action de Γ sur le fibré des jets d’ordre infini sur un petit voisinage épointé $\mathcal{B}$ de 0 est minimale (c’est-à-dire que si $z_0, z_1 \in \mathcal{B}$ et si $\phi : z_0 \rightarrow z_1$ est un germe de biholomorphisme alors il existe une suite $\gamma_n \in \Gamma$ qui converge vers ϕ uniformément au voisinage de z_0). 2) Γ ne préserve aucune structure géométrique au voisinage de 0 (c’est une conséquence triviale du point 1). 3) Si un autre pseudogroupe holomorphe est topologiquement conjugué à Γ alors la conjugaison est ou bien holomorphe, ou bien antiholomorphe. L’ingrédient principal de la preuve est la construction, pour tout pseudogroupe Γ , d’un faisceau $\mathfrak{g}_\Gamma$ d’algèbres de Lie sur $\mathbb{C}^n$ dans lequel Γ est “dense” en un sens naturel. Ensuite, on prouve que si Γ satisfait une hypothèse naturelle alors $\mathfrak{g}_\Gamma(U)$ contient tout champ de vecteur holomorphe sur U , pour tout U ouvert dans $\mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est le complémentaire (ouvert) de 0 dans son bassin d’attraction.

Texte reçu le 27 avril 2000, révisé le 24 juillet 2000

MICHEL BELLIART, UMR AGAT, UFR de Mathématiques, Université Lille I, 59655 Villeneuve d’Ascq Cedex (France) • *E-mail* : `michel.belliart@agat.univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 58H05, 58H15.

Mots clefs. — Pseudogroupes conformes, structure géométrique invariante.

ABSTRACT (*On certain pseudogroups of germs of biholomorphisms of $(\mathbb{C}^n, 0)$*)

Let Γ be a pseudogroup of local holomorphic transformations of $\mathbb{C}^n$ fixing zero. We study the dynamics of Γ . We show that if Γ contains two elements whose 2-jets are in “general position” and sufficiently near the identity, then: 1) Γ acts minimally on the bundle of infinite-order jets on some pointed neighborhood $\mathcal{B}$ of 0 (that is to say: for any $z_0, z_1 \in \mathcal{B}$ and any germ $\phi : z_0 \rightarrow z_1$ of biholomorphism, there exists a sequence $\gamma_n \in \Gamma$ which converges to ϕ uniformly on some neighborhood of z_0). 2) Γ preserves no geometric structure near 0 (this is a trivial consequence of 1). 3) For any holomorphic pseudogroup topologically conjugate to Γ , the germ of conjugacy at 0 is either holomorphic or antiholomorphic. The main feature of the proof is to attach to any pseudogroup Γ a sheaf $\mathfrak{g}_\Gamma$ of Lie algebras on $\mathbb{C}^n$ such that Γ is “dense” in $\mathfrak{g}_\Gamma$ in a natural sense. Then we prove that under some natural assumption on Γ , $\mathfrak{g}_\Gamma(U)$ must be the sheaf of all holomorphic vector fields for any U open in $\mathcal{B}$, where $\mathcal{B}$ is the (open) complementary of 0 in its basin of attraction.

1. Introduction

1.1. Position du problème. — Soit Γ un pseudogroupe de biholomorphismes de $\mathbb{C}^n$ en 0. Γ consiste donc en la donnée d’une collection (γ_i, U_i) d’ouverts $U_i \ni 0$ et de fonctions holomorphes et injectives $\gamma_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\gamma_i(0) = 0$, vérifiant les deux axiomes :

- pour tous couples (γ_i, U_i) et (γ_j, U_j) de Γ , le couple $(\gamma_i \circ \gamma_j, U_j \cap \gamma_j^{-1}(U_i))$ est encore dans Γ ;
- pour tout couple (γ_i, U_i) de Γ , le couple $(\gamma_i^{-1}, \gamma_i^{-1}(U_i))$ est encore dans Γ .

On peut associer à Γ le groupe Γ_0 des germes γ_0 en 0 de tous les éléments γ de Γ . On dit que Γ est une *réalisation* de Γ_0 . Choisir une réalisation de Γ_0 , c’est donc spécifier pour chaque germe γ_0 de Γ_0 un domaine U sur lequel γ_0 admet un représentant γ injectif, en sorte que les axiomes précédents soient vérifiés. Si Γ' est une autre réalisation de Γ_0 et si pour tout γ_0 le domaine du $\gamma' \in \Gamma'$ correspondant est contenu dans celui de γ , on dit que Γ' est une *restriction* de Γ . Par exemple, Γ' peut s’obtenir en posant $U'_i = U_i \cap D$ où D est un domaine fixé.

L’intérêt des notions précédentes se justifie par exemple par leur application à la théorie des feuilletages transversalement holomorphes, où les pseudogroupes d’holonomie des feuilles jouent un grand rôle. Que l’on se place ou non dans ce cadre, on peut se poser sur Γ divers problèmes naturels, les plus immédiats nous semblant être les suivants :

- Quelles propriétés de Γ ne dépendent que de Γ_0 ?
- Quelle est la dynamique de Γ au voisinage de l’origine ?
- Existe-t-il une structure géométrique (cf. [7]) invariante par Γ au voisinage de l’origine ? (Ceci revient à étudier la dynamique de Γ , non plus dans $\mathbb{C}^n$,

mais dans un fibré de jets convenable, comme nous l'expliquerons plus loin).

- Γ est-il "rigide"? ou plus précisément, quelles comparaisons peut-on faire entre les classes de conjugaison de Γ pour divers ordres de régularité (mesurable, topologique, holomorphe...)? Ceci est un premier pas vers la théorie des déformations de Γ .
- En parallèle avec la théorie des groupes de Lie, peut-on définir d'une façon ou d'une autre une "adhérence" et une algèbre de Lie pour Γ ?

1.2. Le cas d'une variable. — Les pseudogroupes à une variable ont fait récemment l'objet de recherches intensives et sont maintenant bien compris. Leur caractère le plus marquant est la dichotomie suivante :

- Si Γ_0 est résoluble, alors Γ est en fait métabélien et possède une forme normale très simple et explicite (voir [5]).
- Si Γ_0 n'est pas résoluble, alors :
 - ▷ Il existe un ouvert Ω dense dans un voisinage de 0, ayant un nombre fini de composantes connexes $\Omega_1, \dots, \Omega_p$, et sur chacune d'elles Γ est *minimal* (c'est-à-dire à orbites toutes denses). C'est le théorème de Scherbakhov, [12].
 - ▷ Le complémentaire de Ω dans son adhérence est la trace sur celle-ci d'une variété analytique réelle V_Γ dont le germe en 0 ne dépend en un sens que de Γ_0 : précisément, on a $V_\Gamma \subset V_\Lambda$ si Λ est une restriction de Γ , et il existe une variété maximale V_0 ne dépendant que de Γ_0 telle que $V_\Gamma \subset V_0$. On a $V_\Lambda = V_0$ dès que Λ est une restriction de Γ à un domaine assez petit ; enfin, si Γ_0 contient un couple d'éléments génériques alors $V_\Gamma = \{0\}$ (Nakaï, [11]).
 - ▷ Enfin, en se basant sur les résultats de Nakaï, I. Liousse, F. Loday et l'auteur ont montré dans [2] que sur chaque Ω_i , Γ est *infinitement transitif* au sens suivant : pour tous $z_0, z_1 \in \Omega_i$ et tout germe $\phi(z) = z_1 + a(z - z_0) + \dots$ de biholomorphisme local il existe une suite $\gamma_n \in \Gamma$ qui converge vers ϕ uniformément sur un petit voisinage de z_0 . Γ ne préserve donc aucune structure géométrique au voisinage de z_0 en dehors de la structure complexe donnée, puisqu'une telle structure aurait un groupe d'isométries local plus petit que le groupe $\text{Diff}(\mathbb{C}, z_0)$ des transformations locales holomorphes fixant z_0 . Une autre façon d'énoncer ce résultat est de dire que l'action de Γ est minimale dans le fibré des jets d'ordre infini sur Ω_i .

1.3. Le cas de plusieurs variables. Énoncé des résultats. — La dichotomie précédente est propre à la dimension 1 ; en dimension $n \geq 2$, d'une part les groupes résolubles ne sont plus nécessairement métabéliens ni de dimension finie, d'autre part les groupes non-résolubles peuvent être finis en cardinal comme

en dimension, et surtout, des groupes de dimension infinie peuvent préserver une structure géométrique ne dérivant pas de la structure complexe (feuilletage, forme de contact, forme de volume...). Par ailleurs, il n'est plus vrai que Γ_0 est dense dans $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ pour un choix générique (au sens de Baire) des 3-jets de ses générateurs⁽¹⁾. De fait, soit Λ un sous-groupe de Schottky de $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ engendré par les transformations $\lambda_1, \dots, \lambda_p$: si $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ sont des germes proches de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ on montre facilement que le sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ engendré par les γ_i est discret. L'ensemble des p -uplets de germes engendrant un groupe discret contient donc un ouvert de $(\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0))^p$.

Pour autant, il reste possible de sauver quelque chose de [2]. Définissons le *bassin d'attraction* $\mathcal{B}$ de 0 pour Γ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ pour lesquels il existe une suite γ_n d'éléments de Γ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(z) = 0$ (c'est donc encore l'ensemble des points dont l'orbite a l'origine dans son adhérence). Introduisons aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le groupe G^k des k -jets de germes de biholomorphismes de $\mathbb{C}^n$ en 0. Ainsi, G^k est l'ensemble des transformations formelles T suivantes,

$$(1) \quad x'_i = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{j_1, \dots, j_p} \alpha(p)_i^{j_1, \dots, j_p} x_{j_1} \cdots x_{j_p} \right)$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(x'_1, \dots, x'_n) = T(x_1, \dots, x_n)$, la matrice $(\alpha(1))$ est inversible et chacun des tenseurs $(\alpha(p))$ est symétrique en ses indices supérieurs (cette dernière convention est faite pour que l'écriture de T sous la forme (1) soit unique). Pour composer deux telles transformations dans G^k , on les compose d'abord comme des fonctions ordinaires puis on tronque le polynôme obtenu à l'ordre k . On montre que G^k a une structure de groupe algébrique complexe. À toute fonction f définie au voisinage de zéro on peut associer la suite f_k de ses jets en ce point.

THÉORÈME A. — *Il existe dans $G^2 \times G^2$ un voisinage V de 1 et un ouvert de Zariski réel Z tels que si $\Gamma \times \Gamma$ contient au moins un couple $(f_2, g_2) \in V \cap Z$, alors :*

- 1) $\mathcal{B}$ est un voisinage ouvert épointé de l'origine ;
- 2) pour tous $z_0, z_1 \in \mathcal{B}$ et tout germe holomorphe et injectif ϕ tel que $\phi(z_0) = z_1$, il existe une suite $\gamma_n \in \Gamma$ qui converge vers ϕ uniformément sur un voisinage de z_0 .

Ce théorème signifie donc que si Γ contient deux éléments proches de l'identité et en "position générale", alors l'adhérence de Γ contient tous les germes d'injection holomorphe entre points de $\mathcal{B}$. Par contre, il y a une obstruction à

⁽¹⁾ Alors qu'en dimension 1, c'est une conséquence non publiée mais facile de [2].

ce que Γ contienne aussi tous les germes fixant 0 : c'est le déterminant de la jacobienne en 0, qui peut être à valeurs dans un sous-groupe fermé strict de $\mathbb{C}^*$.

Soit J^k le fibré des k -jets complexes sur $\mathcal{B}$: c'est un G^k -fibré principal sur $\mathcal{B}$. La notion de *structure géométrique*, présente au moins implicitement chez Lie et Cartan, formalisée par Ehresmann et plus récemment par Gromov, est la suivante : une structure géométrique sur $\mathcal{B}$ est la donnée d'une section dans l'un des fibrés associés à l'un des J^k . Par exemple, un parallélisme est une section de J^1 car ce dernier s'identifie au fibré des repères sur $\mathcal{B}$. De ce point de vue le théorème A affirme la minimalité de Γ sur chacun des J^k , donc admet le corollaire suivant :

THÉORÈME B. — *Sous les hypothèses du théorème A, il n'existe aucune structure géométrique invariante par Γ au voisinage de l'origine.*

Pour obtenir le théorème A, nous passons par une version infinitésimale de celui-ci, qui vaut d'être énoncée pour elle-même. Pour U ouvert dans $\mathbb{C}^n$, soit $\mathfrak{g}(U)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes sur U , munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. La collection $\mathfrak{g}$ des $\mathfrak{g}(U)$ forme un faisceau sur $\mathbb{C}^n$. Définissons maintenant l'"adhérence" de Γ dans $\mathfrak{g}$. Pour $X \in \mathfrak{g}(U)$ et $K \subset U$ compact, il existe un intervalle maximal I_K de $\mathbb{R}$ sur lequel le pseudoflot ϕ_X^t de X sur U est bien défini en restriction à $K \times I_K$. Nous notons $\mathfrak{g}'_\Gamma(U)$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}(U)$ tels que pour tous K et $t_0 \in I_K$ tels que ci-dessus, il existe une suite γ_n d'éléments de Γ qui converge vers $\phi_X^{t_0}$ uniformément sur K . Un fait bien connu, que nous avons redémontré dans [2], est que pour tout U , $\mathfrak{g}'_\Gamma(U)$ est une sous-algèbre de Lie réelle fermée de $\mathfrak{g}(U)$. Les $\mathfrak{g}'$ ne forment qu'un préfaisceau, que nous complétons en un faisceau $\mathfrak{g}$ de la manière habituelle.

THÉORÈME C. — *Supposons (comme au théorème A) que Γ contient un couple (f, g) avec $(f_2, g_2) \in Z \cap V$. Alors pour tout U ouvert dans $\mathcal{B}$, on a $\mathfrak{g}_\Gamma(U) = \mathfrak{g}(U)$.*

Par contre si U est un petit voisinage de l'origine, il y a une obstruction naturelle à ce que $\mathfrak{g}_\Gamma(U)$ contienne tous les champs de $\mathfrak{g}(U)$ nuls à l'origine : l'image de Γ par le morphisme "déterminant" peut être un sous-groupe discret de $\mathbb{C}^*$. Cependant, $\mathfrak{g}_\Gamma(U)$ contient tout champ dont le pseudoflot n'enfreint pas cette obstruction (ce qui revient à dire : tout champ dont la partie linéaire en zéro a une trace nulle). La preuve de ce fait est une étape de la preuve du théorème C.

Enfin, des résultats précédents découle facilement le théorème de rigidité suivant :