Bull. Soc. math. France
130 (1), 2002, p. 1–33

RÉSULTATS SUR LA CONJECTURE DE DUALITÉ ÉTRANGE SUR LE PLAN PROJECTIF

PAR GENTIANA DANILA

RÉSUMÉ. — La conjecture de « dualité étrange » de Le Potier donne un isomorphisme entre l'espace des sections du fibré déterminant sur deux espaces de modules différents de faisceaux semi-stables sur le plan projectif $\mathbb{P}_2$. On considère deux classes orthogonales c, u dans l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ telles que c est de rang strictement positif et u est de rang zéro, et on note M_c et M_u les espaces de modules de faisceaux semi-stables de classe c, respectivement u sur $\mathbb{P}_2$. Il existe sur M_c (resp. M_u) un fibré déterminant inversible $\mathcal{D}_u$ (resp. $\mathcal{D}_c$) et le produit tensoriel externe $\mathcal{D}_c \boxtimes \mathcal{D}_c$ sur l'espace produit $\mathrm{M}_c \boxtimes \mathrm{M}_c$ a une section canonique $\sigma_{c,u}$ qui fournit une application linéaire $\mathcal{D}_{c,u} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{D}_c)^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u)$. Si M_c n'est pas vide, la conjecture affirme que $\mathcal{D}_{c,u}$ est un isomorphisme. Nous prouvons la conjecture dans le cas particulier où c est de rang 2, première classe de Chern nulle et deuxième classe de Chern $c_2(c) = n \leq 5$, et u est de degré $d(u) \leq 3$ et caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Nous donnons la série génératrice $P(t) = \sum_{k\geq 0} t^k h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u^{\otimes k})$ pour $c_2(c) = 3$, $c_2(c) = 4$, $d(u) = 1$, pour les classes c et u considérées ci-dessus.

Texte reçu le 5 mai 2000, accepté le 11 décembre 2000

GENTIANA DANILA, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, Case Postale 7012, 2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
E-mail : `gentiana@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14D20, 14F05, 14J60.

Mots clefs. — Espaces de modules, fibré déterminant, dualité étrange, séries génératrices.

Abstract (*Results on the Strange Duality Conjecture on the Projective Plane*)
Le Potier's 'Strange Duality' conjecture gives an isomorphism between the space of sections of the determinant bundle on two different moduli spaces of semi-stable sheaves on the complex projective plane $\mathbb{P}_2$. We consider two orthogonal classes c, u in the Grothendieck algebra $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ such that c is of positive rank and u of rank zero, and we call M_c and M_u the moduli spaces of semi-stable sheaves of class c, respectively u on $\mathbb{P}_2$. There exists on M_c (resp. M_u) a determinant bundle $\mathcal{D}_u$ (resp. $\mathcal{D}_c$) and the product fibre bundle $\mathcal{D}_c \boxtimes \mathcal{D}_c$ on the product space $\mathrm{M}_c \boxtimes \mathrm{M}_c$ has a canonical section $\sigma_{c,u}$ which provides a linear application $\mathcal{D}_{c,u} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{D}_c)^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u)$. If M_c is not empty, $\mathcal{D}_{c,u}$ is conjectured to be an isomorphism. We prove the conjecture in the particular case where c is of rank 2, zero first Chern class and second Chern class $c_2(c) \leq 5$, and u is of degree $d(u) \leq 3$ and zero Euler-Poincaré characteristic. In addition we give the generating series $P(t) = \sum_{k\geq 0} t^k h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u^{\otimes k})$ for $c_2(c) = 3$, $c_2(c) = 4$, $d(u) = 1$, for the particular classes c and u considered above.

1. Introduction

La motivation principale de cet article est de fournir des exemples en faveur de la dualité étrange sur le plan projectif conjecturée par Le Potier [14]. On considère l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ des classes de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbb{P}_2$, le plan projectif complexe. C'est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}^3$, un isomorphisme étant donné par le rang, la classe de Chern et la caractéristique d'Euler-Poincaré (ceci nous permet de désigner chaque classe $c \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ par le triplet formé par son rang r, sa première classe de Chern c_1 et sa caractéristique d'Euler-Poincaré χ, ou bien, lorsque c'est indiqué, sa deuxième classe de Chern c_2). Elle est munie d'une multiplication et d'une forme bilinéaire donnée par $\langle c, u\rangle = \chi(c \cdot u)$. Pour deux classes c et u orthogonales, de rang $r > 0$ et respectivement 0, on note M_c et M_u les espaces de modules des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ de classe c et respectivement u. Sur chacun de ces espaces il existe un fibré inversible $\mathcal{D}_u$ et respectivement $\mathcal{D}_c$, appelé fibré déterminant. Alors le fibré produit tensoriel externe $\mathcal{D}_u \boxtimes \mathcal{D}_c$ sur $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u$ a une section canonique $\sigma_{c,u}$, qui fournit une application linéaire

$$\mathrm{D}_{c,u} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{D}_c)^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u)$$

appelée morphisme de dualité étrange. Remarquons que le groupe SL(3) agit sur $\mathbb{P}_2$. Il agit ainsi sur les espaces de modules $\mathrm{M}_c, \mathrm{M}_u$, et sur les fibrés déterminants $\mathcal{D}_c, \mathcal{D}_u$. Le morphisme $\mathrm{D}_{c,u}$ est un morphisme de SL(3)-représentations.

Conjecture (J. Le Potier). — *Si* M_c *est non-vide, alors le morphisme de dualité étrange est un isomorphisme.*

On va se restreindre ici au cas

$$c = (2, 0, c_2 = n)$$

(qui recouvre le cas où la première classe de Chern est paire), et

$$u = d(0, 1, \chi = 0).$$

Le cas $d = 1$ et $n \leq 19$ a été analysé dans l'article [5]. Le résultat principal est :

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $\mathfrak{u} = (0, 1, 0) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. *Si* $c = (2, 0, c_2 = n)$, *avec* $n \leq 5$ *et* $u = (0, d, \chi = 0) = d\mathfrak{u}$, *alors l'application linéaire*

$$D_{c,d\mathfrak{u}} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes d})$$

est un isomorphisme pour $d = 2, 3$, *c'est-à-dire que dans ces conditions la conjecture de dualité étrange est vraie.*

On consacre le paragraphe 2 à la construction et l'interprétation géométrique du morphisme $\mathrm{D}_{c,u}$. Les résultats sont contenus dans le théorème 2.1.

Le paragraphe 3 donne des descriptions explicites des faisceaux canoniques sur M_c et $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$, en utilisant le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck. Ces résultats et le théorème de Kawamata-Viehweg permettent d'obtenir l'annulation de la cohomologie supérieure des fibrés déterminants sur M_c et sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$. Ces résultats seront nécessaires aux paragraphes 4 et 7.

Au paragraphe 4 on utilise [17] pour décrire les espaces de modules $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$. Il existe un morphisme $\pi : \mathrm{M}_{d\mathfrak{u}} \to C_d$ (espaces des courbes de degré d dans $\mathbb{P}_2$) qui associe au faisceau G l'équation de son support schématique. C'est un isomorphisme pour $d = 1, 2$ et un morphisme dont la fibre générique est de dimension 1 pour $d = 3$. Ceci nous permet de calculer $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)$.

Au paragraphe 5 on démontre l'injectivité du morphisme $\mathrm{D}_{c,u}$ en utilisant l'interprétation géométrique du théorème 2.1 (iv). Cela repose sur les propriétés de $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$ établies dans le paragraphe 2.

On calcule au paragraphe 6 les espaces $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes 2})$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes 3})$ en tant que SL(3)-représentations, selon la technique développée dans l'article [5] :

PROPOSITION 1.2. — *Avec les notations du théorème précédent, le* SL(3)*-module* $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes 2})$ *est isomorphe à* $\mathbf{S}^n(\mathbf{S}^2 E)$ *et le* SL(3)*-module* $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes 3})$ *est isomorphe à* $\mathbf{S}^n(\mathbf{S}^3 E) \oplus \mathbf{S}^{n-2}(\mathbf{S}^3 E)$ (*où* $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$ *est la représentation standard de* SL(3)).

Ceci nous permet de conclure la preuve du théorème. De plus, nous calculons au paragraphe 7 la dimension des espaces de sections de $\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes k}$ pour $n = 3, 4$, qu'on écrit sous forme de série de Poincaré :

THÉORÈME 1.3. — (i) *Pour l'espace de modules* $\mathrm{M}_{(2,0,-1)}$ *des faisceaux stables de rang 2 et classes de Chern* $(0, 3)$, *la série de Poincaré de* $\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$, $P(t) = \sum_{k\geq 0} t^k h^0(\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes k})$ *est donnée par*

$$P(t) = \frac{1 + t^2 + t^4}{(1 - t)^{10}}.$$

(ii) *Pour l'espace de modules* $\mathrm{M}_{(2,0,-2)}$ *des faisceaux semi-stables de rang* 2 *et classes de Chern* $(0,4)$, *la série de Poincaré de* $\mathcal{D}_{\mathrm{u}}$ *est donnée par*

$$P(t)=\frac{1+t+7t^2+7t^3+22t^4+7t^5+7t^6+t^7+t^8}{(1-t)^{14}}\cdot$$

Notations et conventions. — Le corps de base est le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Par variété algébrique, on entend schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ séparé ; les points considérés sont toujours les points fermés. Les résultats restent valables sans changement sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque. On identifiera la notion de fibré et celle de faisceau localement libre. Pour un espace vectoriel V nous noterons $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V et $\mathbb{P}_\bullet(V)$ l'espace projectif de Grothendieck des espaces vectoriels quotients de dimension 1.

2. Morphisme de dualité étrange

L'objet de cette partie est de présenter la conjecture de Le Potier sur la dualité étrange.

2.1. L'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. — Si S est une variété algébrique, on désigne par $\mathrm{K}(S)$ le groupe de Grothendieck des classes de faisceaux algébriques cohérents sur S. Pour un faisceau F on note $[F]$ sa classe dans le groupe $\mathrm{K}(S)$. Dans ce qui suit, on aura à considérer en particulier le groupe de Grothendieck $K(\mathbb{P}_2)$: c'est un groupe abélien libre de rang 3 ; l'application

$$\begin{aligned}\phi\ :\mathrm{K}(\mathbb{P}_2) &\longrightarrow \qquad\mathbb{Z}^3,\\ [F]\ &\longmapsto \big(\mathrm{rg}(F),c_1(F),\chi(F)\big)\end{aligned}$$

qui à la classe d'un faisceau F associe le rang r de F, la classe de Chern c_1 de F, et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de F, est un isomorphisme de groupes abéliens. On notera un élément de $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ par son image (r,c_1,χ) dans $\mathbb{Z}^3$. Si S est lisse, une loi de multiplication sur $\mathrm{K}(S)$ est définie en prolongeant par linéarité la loi de multiplication définie pour F et G faisceaux algébriques cohérents sur S par

$$F\cdot G=\sum_p(-1)^p\,\underline{\mathrm{Tor}}_p(F,G)$$

Ce produit se réduit au produit tensoriel usuel si l'un des deux faisceaux F ou G est localement libre. On parle alors d'algèbre de Grothendieck.

On note $\eta=[\mathcal{O}_\ell]$ la classe du faisceau structural d'une droite ℓ, et $\eta^2=[\mathcal{O}_p]$ celle du faisceau structural d'un point. En tant qu'algèbre, $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\eta]/(\eta^3)$. On munit $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ de la forme bilinéaire donnée par $\langle c,u\rangle=\chi(c\cdot u)$. Dans la suite l'orthogonalité sera prise relativement à cette forme. On a aussi sur $K(\mathbb{P}_2)$ une involution $u\mapsto u^*$ qui associe à la classe d'un fibré vectoriel celle de son dual.

2.2. Espaces de modules et fibrés déterminants. — Soit S une variété. On note pr_1 la projection $S \times \mathbb{P}_2 \to S$ et pr_2 la projection $S \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur $S \times \mathbb{P}_2$, on note

$$\mathrm{pr}_{1!}\big([\mathcal{F}]\big) := [R^0 \,\mathrm{pr}_{1*}\, \mathcal{F}] - [R^1 \,\mathrm{pr}_{1*}\, \mathcal{F}] + [R^2 \,\mathrm{pr}_{1*}\, \mathcal{F}]$$

dans le groupe $\mathrm{K}(S)$. Cela définit, par linéarité, une application

$$\mathrm{pr}_{1!} : \mathrm{K}(S \times \mathbb{P}_2) \longrightarrow \mathrm{K}(S).$$

Si F est un faisceau cohérent sur S qui admet une résolution finie par des faisceaux localement libres A_i :

$$0 \to A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_0 \to F \to 0$$

on introduit le faisceau inversible

$$\det F = \det A_0 \otimes (\det A_1)^{-1} \otimes \cdots \otimes (\det A_n)^{(-1)^n}.$$

L'application qui à F associe son déterminant $\det F$ est multiplicative sur les suites exactes.

Soient $c \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ une classe de Grothendieck de rang $r > 0$ et M_c l'espace de modules des faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c. C'est [20] une variété algébrique projective irréductible normale, à singularités rationnelles, de dimension $D = 1 - \langle\, c^*, c\rangle$ où c^* est la classe duale de c. On note $c^\perp$ le sous-espace de $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ des classes orthogonales à c. Dans [7], Drézet a construit un morphisme surjectif de groupes $\lambda_c : c^\perp \to \mathrm{Pic}(\mathrm{M}_c)$ caractérisé par la propriété universelle suivante :

Pour toute famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c, paramétrée par une variété algébrique S, la classe

$$\lambda_{\mathcal{F}}(u) = \det \mathrm{pr}_{1!}\big(\mathcal{F} \cdot \mathrm{pr}_2^*(u)\big)$$

définit un fibré inversible sur la variété S. Si $f_{\mathcal{F}} : S \to \mathrm{M}_c$ est le morphisme modulaire associé à la famille $\mathcal{F}$, on a

$$f_{\mathcal{F}}^*\big(\lambda_c(u)\big) = \lambda_{\mathcal{F}}(u)$$

et le fibré $\lambda_c(u)$ est le seul à isomorphisme près qui satisfait à cette propriété pour toute famille plate $\mathcal{F}$.

S'il existe un faisceau universel $\mathcal{F}$ sur M_c, d'après la propriété universelle de $\lambda_c(u)$, il résulte que $\lambda_c(u) = \lambda_{\mathcal{F}}(u)$. En général, on prouve l'existence de $\lambda_c(u)$ en écrivant $\mathrm{M}_c = \Omega^{\mathrm{ss}}/\,\mathrm{SL}(H)$ comme quotient d'un ouvert dans un schéma de Hilbert par l'action d'un groupe réductif, en considérant une famille universelle sur Ω^{ss} et en utilisant un argument de descente.

On note K_c le sous-$\mathbb{Z}$-module libre de rang 1 de $c^\perp$ des classes de rang 0. On appelle $\mathfrak{u}$ le générateur positif de K_c (*i.e.* $c_1(\mathfrak{u})$ est un multiple positif de la