

R -MATRICE UNIVERSELLE POUR $U_h(D(2, 1, x))$ ET INVARIANT D'ENTRELACS ASSOCIÉ

PAR HENRIK THYS

RÉSUMÉ. — En utilisant la méthode du double quantique, nous construisons une R -matrice universelle pour la quantification de la superalgèbre de Lie $D(2, 1, x)$. Nous utilisons ce résultat pour construire un invariant d'entrelacs et nous montrons qu'il est égal à une spécialisation du polynôme de Dubrovnik introduit par Kauffman.

ABSTRACT (*Universal R -matrix for $U_h(D(2, 1, x))$ and link invariant arising from it*)

Using the quantum double method, we construct a universal R -matrix for the quantization of the Lie superalgebra $D(2, 1, x)$. We use this result to construct a link invariant and show it coincides with a specialization of Kauffman's Dubrovnik polynomial.

Introduction

Les groupes quantiques introduits autour de 1983–1985 par Drinfeld et Jimbo sont des déformations à un paramètre des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples complexes. Techniquement, ces « quantifications » sont des algèbres de Hopf munies de « R -matrices universelles », c'est-à-dire d'éléments qui sont responsables de l'existence de solutions de la fameuse équation de Yang-Baxter et donc de représentations des groupes de tresses.

Texte reçu le 23 avril 2001, accepté le 23 octobre 2001

HENRIK THYS, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims • *E-mail* : thys@univ-reims.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 17B37, 81R50, 57M27, 17B25, 16W35.

Mots clefs. — Supergroupe quantique, R -matrice universelle, double quantique, invariant de nœuds, superalgèbre de Lie.

Dans les années 1970, Victor Kac [5] a étudié une généralisation naturelle des algèbres de Lie semisimples, à savoir les superalgèbres de Lie. Dans la classification qu'il en donne, il y a celles que l'on peut appeler des superalgèbres « classiques » comme $\mathfrak{sl}(n|m)$ ou $\mathfrak{osp}(n|m)$ et il y a des superalgèbres exceptionnelles. Parmi ces dernières, il y a une famille, notée $D(2, 1, x)$ dans [5], et que nous noterons D_x , dépendant d'un paramètre continu x . La superalgèbre de Lie D_x joue un rôle particulier en physique où elle fournit la seule théorie topologique quantique des champs (TQFT) de Chern-Simons pour laquelle la théorie conforme des champs (CFT) de dimension deux correspondante a une supersymétrie $N = 4$. Elle joue aussi un rôle particulier dans les travaux récents de Pierre Vogel [18] et de Jens Lieberum [11] sur les invariants de Vassiliev.

Après les algèbres de Lie semisimples, les superalgèbres de Lie ont également été quantifiées (par Gould *et al.*, Leites *et al.*, Scheunert, etc., *cf.* par exemple [1], [3], [14], [20]). Les quantifications obtenues sont des superalgèbres de Hopf munies de bases de type Poincaré-Birkhoff-Witt.

Pour ce qui est de l'existence d'une R -matrice universelle pour les supergroupes quantiques, elle a été établie pour les quantifications de toutes les superalgèbres de Lie classifiées par Kac, à l'exception précisément de D_x . Dans cette partie, nous comblons cette lacune en construisant explicitement une R -matrice universelle pour la quantification $U_h(D_x)$.

La méthode utilisée est celle du double quantique introduite par Drinfeld, méthode dont se sont servis Rosso [13], Kirillov-Reshetikhin [9] et Levendorsky-Soibelman [10] pour les groupes quantiques. Cette méthode s'étend au cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué. Nous définissons des analogues des vecteurs de racines positives et négatives pour $U_h(D_x)$. Nous définissons également l'analogue de la sous-algèbre positive U_+ (resp. sous-algèbre négative U_-) engendrée par les vecteurs de racines positives (resp. négatives), et nous construisons un accouplement de Hopf entre U_+ et U_- . Ensuite, nous calculons les relations de commutation entre les vecteurs de racines ainsi que leur coproduit. Ceci nous permet de construire des bases de U_+ et U_- , duales pour l'accouplement de Hopf. Nous en déduisons une R -matrice universelle pour $U_h(D_x)$.

Une R -matrice universelle sur une quantification formelle munit la catégorie des modules topologiques d'une structure de catégorie rubanée au sens de Turaev, *cf.* [6], [22]. Dans le cas qui nous intéresse, ceci fournit pour chaque $U_h(D_x)$ -module un invariant d'isotopie d'entrelacs parallélisés et orientés. En prenant un supermodule de dimension six, nous obtenons un invariant $\mathcal{I}$ d'entrelacs parallélisés non orientés, à valeurs dans $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, et nous montrons qu'il est égal à une spécialisation du polynôme de Dubrovník introduit par Kauffman.

Le plan est le suivant. Les §§1.1 et 1.3 sont consacrés à des rappels sur les superalgèbres de Hopf et sur $U_h(D_x)$. Au §1.4 nous énonçons les résultats

principaux (théorèmes 1.2 et 1.3). Le §2.1 est consacré à la construction d'un accouplement de Hopf et de ses propriétés et le §2.2 à la construction d'un double quantique $\mathcal{D}$. Au §3.1 nous établissons des relations vérifiées dans $\mathcal{D}$ et nous donnons la démonstration du théorème 1.2 au §3.2. Au §4.1, nous définissons un $U_h(D_x)$ -module M de rang 6 et nous calculons le tressage correspondant à l'aide du théorème 1.2. Au §4.2, nous énonçons quelques propriétés de la catégorie rubanée associée à M , et nous terminons par la démonstration du théorème 1.3 au §4.3.

Cet article est tiré du troisième chapitre de ma thèse [16]. Je tiens à remercier J. Alev qui m'a encouragé à construire un invariant de nœud à partir de la R -matrice du §4.1 et C. Kassel pour son aide.

1. Énoncé des théorèmes principaux

Dans ce paragraphe, nous commençons par quelques rappels sur les superalgèbres de Hopf, l'équation de Yang-Baxter graduée et les R -matrices universelles. Nous donnons ensuite la définition de la superalgèbre de Hopf $U_h(D_x)$ qui est la quantification de la superalgèbre de Lie D_x . Nous terminerons par l'énoncé des théorèmes principaux.

Le contenu du §1.1 se trouve dans de nombreux articles. On pourra notamment consulter [1], [3], [14], [19], [20], [21].

1.1. Superalgèbres de Hopf tressées et double quantique. — On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Un *superespace vectoriel* V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'une graduation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *i.e.* d'une somme directe de deux espaces vectoriels $V = V_0 \oplus V_1$, où V_0 est la partie *paire* de V et V_1 la partie *impaire*. Les éléments de V_0 (resp. de V_1) sont dits *homogènes pairs* (resp. *homogènes impairs*). Si $v \in V_0$, on pose $|v| = 0$ et si $v \in V_1$, on pose $|v| = 1$, et on appelle *degré* ces quantités. Le corps $\mathbb{C}$ est un superspace dont la partie impaire est réduite à 0. Le produit tensoriel de deux superspaces V et W est le superspace $V \otimes W = (V \otimes W)_0 \oplus (V \otimes W)_1$, où

$$(V \otimes W)_0 = (V_0 \otimes V_0) \oplus (V_1 \otimes V_1), \quad (V \otimes W)_1 = (V_0 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_0).$$

Étant donné deux superspaces V et W , un *morphisme de superspaces* $f : V \rightarrow W$ est une application linéaire telle que $f(V_i) \subset W_i$. Dans toute la suite, le morphisme identité d'un superspace V sera noté id_V . La *volte* de deux superspaces V, W est le morphisme de superspaces $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ défini sur des éléments homogènes $v \in V, w \in W$ par

$$\tau(v \otimes w) = (-1)^{|v| \cdot |w|} w \otimes v.$$

(La volte sera notée τ pour tous les couples de superspaces.)

Une *superalgèbre* est un triplet (A, μ, η) où A est un superspace, $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ et $\eta : \mathbb{C} \rightarrow A$ des morphismes de superalgèbres tels que

$$\mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu) \quad \text{et} \quad \mu(\eta \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \eta) = \text{id}_A.$$

On notera $\mu(a \otimes a') = aa'$ pour $a, a' \in A$. Étant donné deux algèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) , un morphisme de superalgèbres $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de superspaces tel que $f(aa') = f(a)f(a')$ pour tous $a, a' \in A$. Le produit tensoriel de deux superalgèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) est une superalgèbre $(A \otimes B, \mu_{A \otimes B}, \eta_{A \otimes B})$ où $\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\text{id}_A \otimes \tau \otimes \text{id}_B)$ et $\eta_{A \otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$. On notera que pour des éléments homogènes $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, on a

$$(1.1) \quad (a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b| \cdot |a'|} aa' \otimes bb'.$$

Une *superalgèbre de Hopf* $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est la donnée d'une superalgèbre (A, μ, η) , de morphismes de superalgèbres $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ (*le coproduit*) et $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ (*la coïunité*), et d'un morphisme de superspaces $S : A \rightarrow A$ (*l'antipode*) tels que

- 1) $(\Delta \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \Delta)\Delta$,
- 2) $(\varepsilon \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}_A$,
- 3) $\mu(\text{id}_A \otimes S)\Delta = \mu(S \otimes \text{id}_A)\Delta = \eta\varepsilon$.

Rappelons que l'antipode est un anti-morphisme de superalgèbre, *i.e.*

$$S(aa') = (-1)^{|a| \cdot |a'|} S(a')S(a), \quad a, a' \in A \text{ homogènes.}$$

Une superalgèbre de Hopf A est dite *tressée* s'il existe un élément inversible $R = \sum a_i \otimes b_i \in (A \otimes A)_0$ tel que

$$\begin{aligned} R\Delta(a) &= (\tau \circ \Delta)(a)R, \quad \forall a \in A, \\ (\Delta \otimes \text{id}_A)R &= R_{13}R_{23}, \quad (\text{id}_A \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_{12} &= \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i, \\ R_{23} &= \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i \in A \otimes A \otimes A. \end{aligned}$$

L'élément R est appelé *R-matrice universelle* de A . Il vérifie l'équation de Yang-Baxter graduée

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Nous rappelons maintenant la construction du *double quantique* de Drinfeld. On pourra consulter [2], [7], [12], [4] pour les détails. Soient A et B deux superalgèbres de Hopf avec antipode inversible. Un *accouplement de Hopf* est

un morphisme de superspaces $\varphi : B \otimes A \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$(1.2) \quad \begin{cases} \varphi(bb' \otimes a) = \sum_{(a)} (-1)^{|b'| \cdot |a_{(1)}|} \varphi(b \otimes a_{(1)}) \varphi(b' \otimes a_{(2)}), \\ \varphi(b \otimes aa') = \sum_{(b)} \varphi(b_{(1)} \otimes a') \varphi(b_{(2)} \otimes a), \\ \varphi(1 \otimes a) = \varepsilon(a) \quad \text{et} \quad \varphi(b \otimes 1) = \varepsilon(b), \\ \varphi(b \otimes S(a)) = \varphi(S^{-1}(b) \otimes a). \end{cases}$$

pour tous les éléments homogènes $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, et où

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)},$$

suivant la notation de Sweedler. On construit à partir de A et B une superalgèbre de Hopf $\mathcal{D}(A, B, \varphi)$ de la manière suivante :

- 1) $\mathcal{D}(A, B, \varphi) = A \otimes B$ comme superspace.
- 2) Le coproduit de $\mathcal{D}(A, B, \varphi)$ est donné par $(\text{id}_A \otimes \tau \otimes \text{id}_B)(\Delta_A \otimes \Delta_B)$.
- 3) La coïunité est le produit tensoriel des coïunités de A et B .
- 4) L'unité est le produit tensoriel des unités de A et B .
- 5) Le produit est défini par les deux formules suivantes :

$$(a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b,$$

$$(1 \otimes b)(a \otimes 1) = \sum_{(a), (b)} (-1)^\xi \varphi(S(b_{(1)}) \otimes a_{(1)}) \varphi(b_{(3)} \otimes a_{(3)}) a_{(2)} \otimes b_{(2)},$$

où $a \in A$, $b \in B$ sont homogènes et

$$\xi = |a_{(1)}| \cdot |b_{(2)}| + |a_{(2)}| \cdot |b_{(2)}| + |a_{(1)}| \cdot |b_{(3)}| + |a_{(2)}| \cdot |b_{(3)}|.$$

- 6) L'application $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $b \mapsto 1 \otimes b$) de A dans $\mathcal{D}(A, B, \varphi)$ (resp. de B dans $\mathcal{D}(A, B, \varphi)$) est un morphisme de superalgèbres de Hopf injectif.

Ces deux derniers points nous permettent d'identifier a à $a \otimes 1$ pour $a \in A$ et b à $1 \otimes b$ pour $b \in B$, et ainsi ab à $a \otimes b$. Soient alors $(a_{i \in I})$ (resp. $(b_{i \in I})$) une base de A (resp. B), indexées par un ensemble I , duales pour φ , i.e. $\varphi(b_j \otimes a_i) = \delta_{ij}$. Alors l'élément

$$\sum_i a_i \otimes b_i$$

est une R -matrice universelle pour $\mathcal{D}(A, B, \varphi)$, munissant cette superalgèbre de Hopf d'une structure de superalgèbre de Hopf tressée.

1.2. La superalgèbre de Lie D_x . — Fixons un nombre complexe $x \neq 0, -1$. Rappelons que la superalgèbre de Lie D_x introduite par Kac (cf. [5], où