Bull. Soc. math. France
130 (3), 2002, p. 349–386

MASSE DES POINTES, TEMPS DE RETOUR ET ENROULEMENTS EN COURBURE NÉGATIVE

PAR NATHANAËL ENRIQUEZ & JACQUES FRANCHI

RÉSUMÉ. — Soient Γ un groupe discret géométriquement fini d'isométries d'une variété de Hadamard pincée X et $\mathcal{P}$ une pointe de l'orbifold associé $\mathcal{M} := \Gamma \setminus X$. Munissant $T^1\mathcal{M}$ de sa mesure de Patterson-Sullivan m, nous obtenons une estimation asymptotique de la masse d'un petit voisinage horocyclique de $\mathcal{P}$, moyennant une hypothèse sur la croissance du sous-groupe parabolique associé à $\mathcal{P}$, hypothèse qui est réalisée si X est symétrique de rang 1. Nous en déduisons une estimation asymptotique du temps de retour du flot géodésique près de $\mathcal{P}$, et de la loi de la durée d'une excursion du flot géodésique près de $\mathcal{P}$.

Dans le cas particulier des orbifolds hyperboliques réels ou complexes, nous précisons ces estimations, et nous calculons de plus la loi asymptotique de l'enroulement d'une excursion du flot géodésique près de $\mathcal{P}$.

Texte reçu le 22 mai 2001, accepté le 16 janvier 2002

NATHANAËL ENRIQUEZ, Laboratoire de Probabilités de Paris 6, 4place Jussieu, tour 56, 3ème étage, 75252 Paris Cedex 05 • *E-mail :* `enriquez@ccr.jussieu.fr`
JACQUES FRANCHI, I.R.M.A., Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex • *E-mail :* `franchi@math.u-strasbg.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37A50, 37D40.

Mots clefs. — Variété hyperbolique de volume infini, mesure de Patterson-Sullivan, mesure de Palm.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2002/349/$ 5.00

Abstract (*Mass of cusps, time of return and windings in negative curvature*)

Let Γ be a geometrically finite discrete group of isometries of a Hadamard manifold X, and $\mathcal{P}$ a cusp of the orbifold associated to $\mathcal{M} := \Gamma \setminus X$. $T^1\mathcal{M}$ being endowed with its Bowen-Margulis-Patterson-Sullivan m, we obtain the asymptotic of the mass of a small horocyclic neighbourhood of $\mathcal{P}$, after introducing an assumption on the growth of the parabolic neighbourhood associated with $\mathcal{P}$, which is automatically verified when X is symmetric of rank 1. We deduce the asymptotic of the time of return of the geodesic flow near $\mathcal{P}$.

In the special case of real and complex hyperbolic orbifolds, we precise these asymptotics, and we compute also the asmptotic law of the winding of the geodesic flow near $\mathcal{P}$.

1. Introduction

Les variétés hyperboliques et leur flot géodésique constituent un exemple fondamental de système dynamique. En courbure constante et volume fini, la mesure invariante associée est naturellement la mesure de Liouville. Son substitut naturel en volume infini ou en courbure variable pincée, au moins dans le cas géométriquement fini, est la mesure m utilisée en particulier par Bowen, Margulis et Sullivan [17], [18], qui est construite sur le fibré tangent unitaire à partir de la famille des mesures μ_z sur l'ensemble-limite de la variété, famille construite originellement par Patterson [15] dans le cadre de la courbure constante. Ces mesures apparaissent plus tard dans le cadre de la courbure variable, dans [14]. Voir aussi parmi les travaux plus récents [2] et [5].

Cette mesure m, de Patterson-Sullivan, présente donc un grand intérêt. Elle est bien sûr invariante par le flot géodésique, mais elle est très singulière, et donc délicate à étudier.

Nous nous proposons ici d'abord de calculer la masse asymptotique sous m d'un petit voisinage horocyclique d'une pointe $\mathcal{P}$ d'un orbifold $\mathcal{M}$, et d'en déduire l'asymptotique sous la mesure invariante m des temps de retour du flot géodésique sur un petit horocycle de la pointe $\mathcal{P}$, via la masse de la mesure de Palm induite sur ce petit horocycle par m. Notons que cette dernière masse fournit également la queue de la loi de la profondeur de pénétration d'une excursion du flot géodésique près de $\mathcal{P}$.

Nous évaluons aussi la loi asymptotique sous m de la durée d'une telle excursion.

Nous effectuons ces calculs dans le cadre général d'un orbifold géométriquement fini de courbure négative pincée, avec une hypothèse additionnelle sur la croissance du groupe d'holonomie de la pointe $\mathcal{P}$, hypothèse qui est réalisée au moins dans le cas des espaces symétriques de rang 1.

Observant que les trois quantités évoquées ci-dessus s'obtiennent par l'évaluation de séries rappelant les séries de Poincaré, nous sommes naturellement conduits à regrouper leur calcul sous la forme de l'étude générale de telles séries, que nous nommons « séries de Poincaré généralisées ». Nous appliquons ensuite cette étude générale aux trois quantités évoquées ci-dessus.

Du fait de la variation de la courbure, il n'est pas possible de donner un équivalent exact des quantités qui nous intéressent ici, et donc nos résultats dans le cadre général donnent un exposant précis, mais ne peuvent au niveau des constantes fournir qu'un encadrement.

C'est pourquoi nous focalisons ensuite notre étude sur deux cas particuliers fondamentaux, celui de la courbure constante, c'est-à-dire celui des orbifolds hyperboliques réels, et celui des orbifolds hyperboliques complexes. Nous précisons alors nos calculs précédents, et obtenons des équivalents exacts pour les quantités considérées, fournissant explicitement toutes les constantes.

Dans ces deux cas réel et complexe, nous calculons de plus la loi asymptotique sous m des enroulements du flot géodésique au cours d'une excursion près de $\mathcal{P}$.

Ce calcul est à mettre en perspective avec les travaux précédents des auteurs avec Y. Le Jan dans le cas réel de la courbure négative constante [7], où il s'agissait de calculer, au moyen du calcul stochastique, l'enroulement asymptotique global d'une géodésique. Un travail antérieur de Guivarc'h et Le Jan [10], qui traitait le cas particulier du quotient par le groupe modulaire, montre le lien de ce sujet avec les problèmes d'approximations diophantiennes. Dans le présent travail, nous décrivons la loi de l'enroulement des excursions géodésiques individuelles sous leur mesure de Palm (relative à m).

Les auteurs remercient vivement Frédéric Paulin pour son aide obligeante concernant le passage de la courbure négative constante à la courbure négative pincée.

2. Notations et rappels

Sauf mention contraire, les rappels se réfèrent à [2].

Soit X une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure κ négative pincée : $-\infty < -\alpha^2 \leq \kappa \leq -1$.

Notons d sa distance riemannienne, ∂X son bord à l'infini, et d_x la distance visuelle vue de x, définie sur ∂X par : pour tous x dans X et a, b dans ∂X

$$d_x(a,b) := \exp\Big(-\frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \big(d(a_t,x) + d(b_t,x) - d(a_t,b_t) \big) \Big), \tag{1}$$

où a_t, b_t parcourent n'importe quels rayons géodésiques tendant vers a, b respectivement.

Pour tout $a \in \partial X$, la fonction (distance horocyclique) de Busemann β_a est définie sur X^2 par

$$\beta_a(x,y) := \lim_{t\to\infty} \big(d(a_t,x) - d(a_t,y) \big) \tag{2}$$

pour a_t tendant vers a lorsque $t \to \infty$, le long de n'importe quel rayon géodésique.

Soit Γ un groupe discret (non élémentaire) géométriquement fini d'isométries de X (voir [3]), d'ensemble limite noté $\Lambda(\Gamma)$ et d'exposant critique noté δ (égal à la dimension de Hausdorff de $\Lambda(\Gamma)$ pour toute d_x).

Notons $\{\mu_x \mid x \in X\}$ la famille des mesures de Patterson, qui sont finies, supportées par $\Lambda(\Gamma)$ et vérifient

$$\frac{\mathrm{d}\mu_x}{\mathrm{d}\mu_y}(a) = \mathrm{e}^{-\delta\beta_a(x,y)} \quad \text{pour tous } x, y \in X \text{ et } a \in \partial X, \tag{3}$$

ainsi que

$$\mu_x \circ \gamma^{-1} = \mu_{\gamma x} \quad \text{pour tous } x \in X \text{ et } \gamma \in \Gamma. \tag{4}$$

Fixons un point de référence $x_0 \in X$.

À tout vecteur unitaire tangent $v \in T^1X$, associons les extrémités répulsive v_- et attractive v_+ de la géodésique orientée qu'il engendre, ainsi que la distance algébrique s entre la projection orthogonale de x_0 sur cette géodésique et la base $\pi(v) \in X$ de v. L'application de T^1X dans $\partial X \times \partial X \times \mathbb{R}$ qui à v associe (v_-, v_+, s) est un homéomorphisme.

Notons $\tilde{m}$ la mesure de Patterson-Sullivan sur T^1X, définie par

$$\mathrm{d}\tilde{m}(v) = \mathrm{d}\tilde{m}(v_-, v_+, s) := \mathrm{d}_{x_0}(v_-, v_+)^{-2\delta}\mathrm{d}\mu_{x_0}(v_-)\mathrm{d}\mu_{x_0}(v_+)\mathrm{d}s. \tag{5}$$

Elle ne dépend pas de x_0, est invariante par le flot géodésique, et est Γ-invariante.

Elle induit donc une mesure m invariante par le flot géodésique sur $T^1\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est l'orbifold riemannien $\Gamma \setminus X$.

On montre que le flot géodésique est m-ergodique.

Faisons l'hypothèse que X admet au moins un point fixe parabolique $\xi \in \partial X$, et notons Γ_ξ le stabilisateur de ξ dans Γ, puis δ_ξ l'exposant critique de Γ_ξ.

Rappelons que lorsque X est un espace hyperbolique réel, on a $\delta_\xi = \frac{1}{2}k$, où k est le rang du sous-groupe parabolique Γ_ξ.

Supposons de plus que $\delta > \delta_\xi$, ce qui est automatique dans le cas des espaces symétriques de rang 1, mais n'est pas toujours vrai en courbure variable (voir [5]). Cette hypothèse assure que les mesures de Patterson n'ont pas d'atome en ξ (voir [5]), et aussi, que la pointe est de m-mesure finie.

Notons $\mathcal{P}$ la pointe de $\mathcal{M}$ associée à ξ, c'est-à-dire le bout du quotient par Γ de l'enveloppe convexe de $\Lambda(\Gamma)$ dans X correspondant à la classe de conjugaison de Γ_ξ dans Γ.

Soit $\{B_h | h \in \mathbb{R}\}$ l'unique famille d'horoboules ouvertes basées en ξ vérifiant :

a) B_h converge vers ξ dans $X \cup \partial X$ lorsque $h \to +\infty$;

b) $d(H_h, H_{h'}) = |h - h'|$, où $H_h := \partial B_h$;

c) $\mathcal{P}_h := \Gamma_\xi \backslash B_h$ s'injecte dans $\mathcal{M}$ par la projection canonique $\Gamma_\xi \backslash X \to \Gamma \backslash X$ si et seulement si $h \geq 0$.

On dit que $\mathcal{P}_h$ est le *voisinage de Margulis canonique de hauteur* h de la pointe $\mathcal{P}$.

Notons π_ξ l'homéomorphisme Γ_ξ-équivariant de $\partial X \setminus \{\xi\}$ sur H_0 qui à a associe l'unique point d'intersection de l'horosphère H_0 avec la géodésique reliant a et ξ.

Soit d_ξ la distance de Hamenstädt sur $\partial X \setminus \{\xi\}$, invariante par Γ_ξ, définie (voir [12, Appendix]) par

$$d_\xi(a,b) := \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t d_{\xi_t}(a,b), \tag{6}$$

où ξ_t est n'importe quel rayon géodésique partant sur H_0 et arrivant en ξ.

Lorsque X est le demi-espace de Poincaré de dimension $N+1$ et $\xi = \infty$, on vérifie que d_ξ est un multiple de la distance euclidienne sur $\partial X \setminus \{\xi\} \equiv \mathbb{R}^N$.

Nous aurons besoin (voir [2, 1.3]) de la variante suivante de l'inégalité CAT(-1), relative au cas où l'un des points du triangle est situé à l'infini.

Lemme 1. — *Soient $a \in \partial X$, $x, y \in X$, α sur le rayon géodésique $[x,a[$ et $\beta \in [y,a[$, et soient $\bar a, \bar x, \bar y, \bar\alpha, \bar\beta$ des homologues dans $\mathbb{H}^2$: $\bar a \in \partial\mathbb{H}^2$, $\bar x, \bar y \in \mathbb{H}^2$, $\bar\alpha \in [\bar x, \bar a[$, $\bar\beta \in [\bar y, \bar a[$, tels que*

$$d(x,y) = d(\bar x,\bar y), \quad d(x,\alpha) = d(\bar x,\bar\alpha), \quad d(y,\beta) = d(\bar y,\bar\beta).$$

Alors on a $d(\alpha,\beta) \leq d(\bar\alpha,\bar\beta)$.

Démonstration. — Notons a_s le point de $[x,a[$ situé à distance s de x, et β_s le point de $[y,a_s]$ situé à distance $d(y,\beta)$ de y, puis $\bar a_s, \bar\beta_s$ les points homologues dans $\mathbb{H}^2$.

L'inégalité CAT(-1) appliquée au triangle (a_s,x,y) donne $d(\alpha,\beta_s) \leq d(\bar\alpha,\bar\beta_s)$, et le théorème de comparaison de Topogonov (voir [3, 1.1.3]) assure que les angles (β_s,y,β) et $(\bar\beta_s,\bar y,\bar\beta)$ tendent vers 0 lorsque $s \to \infty$, et donc que $d(\beta_s,\beta)$ et $d(\bar\beta_s,\bar\beta)$ tendent vers 0 lorsque $s \to \infty$; d'où le résultat en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus. □

3. Séries de Poincaré généralisées

Pour ξ_t rayon géodésique partant sur H_0 et arrivant en ξ comme ci-dessus, la mesure $\mathrm{e}^{\delta t}\mu_{\xi_t}$ converge lorsque $t \to +\infty$ vers une mesure μ_ξ supportée par $\Lambda(\Gamma)$, invariante par Γ_ξ et vérifiant :

$$\mathrm{d}\mu_\xi(a) = \mathrm{e}^{-\delta\beta_a(\pi_\xi(a),x)}\mathrm{d}\mu_x(a) \quad \text{pour tout } x \in X. \tag{7}$$