Bull. Soc. math. France
130 (3), 2002, p. 387–408

INTERPOLATION SUR DES PERTURBATIONS D'ENSEMBLES PRODUITS

PAR DAMIEN ROY

À la mémoire de P. Robba

RÉSUMÉ. — On démontre un résultat concernant l'interpolation de fonctions analytiques sur une perturbation d'ensemble produit qui, dans le cas p-adique, répond à une conjecture de P. Robba et, dans le cas complexe, complète des résultats antérieurs de E. Bombieri, S. Lang, D. Masser, J.-C. Moreau et M. Waldschmidt.

ABSTRACT (*Interpolation on pertubations of cartesian products*). — In 1970, E. Bombieri and S. Lang used analytic results of P. Lelong to establish a Schwarz lemma for a well distributed set of points in $\mathbb{C}^n$. Their result was extended to an interpolation lemma, first by D.W. Masser in the case of polynomials, then by M. Waldschmidt for analytic functions. J.-C. Moreau gave an analog of it over the real numbers and P. Robba in the p-adic realm. Robba also conjectured a p-adic interpolation lemma for the case where the set of points of interpolation is what he calls a perturbation of a product set, a situation which includes both the case of a well distributed set and the case of a cartesian product. In this paper, we present an algebraic proof of Robba's conjecture together with a generalization of it over the complex numbers.

Texte reçu le 30 mai 2001, accepté le 22 mars 2002

DAMIEN ROY, Département de mathématiques, Université d'Ottawa, 585 King Edward, Ottawa, Ontario, Canada K1N 6N5 • *E-mail :* droy@uottawa.ca
Url : http://aix.uottawa.ca/~droy

Classification mathématique par sujets (2000). — primaire : 41A05, secondaire : 11J99, 32E30.

Mots clefs. — Interpolation, polynômes, lemme de Schwarz, fonctions analytiques, analyse p-adique, produits cartésiens, ensembles bien distribués.

Recherche partiellement subventionnée par le CRSNG et le CICMA.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2002/387/$ 5.00

Introduction

Le point de départ de ce travail est un très joli article de P. Robba [9] dans lequel il démontre des versions p-adiques de résultats d'interpolation sur un ensemble de points bien distribués. Ces résultats sont d'abord, à la source, un lemme de Schwarz de E. Bombieri et S. Lang pour les fonctions analytiques complexes [1], puis un lemme d'interpolation polynomiale de D.W. Masser (appendice II de [3]) ultérieurement raffiné par Masser lui-même (théorème A de [5]) et étendu aux fonctions analytiques par M. Waldschmidt (théorème 7.4.13 de [12]), et enfin un lemme d'interpolation polynomiale de J.-C. Moreau [6] qui répond à une question de Masser (appendice II de [3]) et que Moreau a étendu par la suite aux fonctions analytiques (proposition 2.6 de [7]).

Les résultats de Bombieri, Lang et Masser sont efficaces lorsque les points d'interpolation sont bien répartis dans une boule de $\mathbb{C}^n$ et leur démonstration s'appuie sur des propriétés de la masse moyenne des zéros d'une fonction analytique complexe. La méthode de Robba s'apparente à la leur car elle emploie une notion de multiplicité pondérée d'une fonction analytique p-adique aux propriétés analogues. Le résultat de Moreau quant à lui suppose que les points d'interpolation sont bien répartis dans une boule de $\mathbb{R}^n$ et sa démonstration est elle-aussi analytique. Le lecteur pourra consulter le chapitre 7 de [12] pour un aperçu plus complet des multiples travaux initiés par le résultat de Bombieri et Lang. Notons toutefois, comme me l'a signalé le rapporteur, que la première démonstration d'un lemme de Schwarz pour un ensemble bien distribué est antérieure et due à J.-P. Serre [11]. Elle est p-adique et repose sur une technique d'interpolation. Mentionnons aussi que les estimations de Robba pour la multiplicité pondérée (voir § III.2.7 de [9]) qui portent sur des germes d'hypersurfaces ont été étendus en codimension quelconque par J. Oesterlé [8].

Dans le même article, P. Robba démontre encore un lemme d'interpolation p-adique sur les produits cartésiens (théorème 3.1 de [9]), et il conjecture un résultat semblable pour la situation où l'ensemble des points d'interpolation est ce qu'il appelle une *perturbation d'ensemble produit*, une situation qui contient à la fois le cas d'un ensemble bien distribué et celui d'un ensemble produit (voir § 3.3 de [9]). Nous nous proposons ici de démontrer cette séduisante idée de Robba à la fois sur un corps ultramétrique complet à valuation dense de caractéristique quelconque, et sur le corps des nombres complexes.

Notre argument ici est algébrique, grâce à l'application d'un critère de Waldschmidt-Moreau qui ramène le problème au cas des polynômes. Son principe ainsi que nos résultats principaux sont décrits au paragraphe suivant.

Remerciements. — Je remercie François Gramain pour ses commentaires sur une première version de ce travail.

1. Notations et résultats principaux

On fixe dans toute la suite un entier positif n et on désigne par K le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou un corps valué ultramétrique complet dont le groupe de valuation $|K^\times|$ est dense dans l'ouvert des réels positifs (comme par exemple le corps p-adique $\mathbb{C}_p$ pour un nombre premier p).

Pour un point $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ et un n-uplet $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres réels positifs, on note

$$B(\alpha, r) = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in K^n\,;\ |x_i - \alpha_i| \le r_i \text{ pour } i = 1, \dots, n\big\}$$

le polydisque « fermé » de centre α et de multi-rayon r. On dit qu'une fonction $f\colon B(\alpha, r) \to K$ est *analytique* si elle est continue et représentée à l'intérieur de $B(\alpha, r)$ par une série de puissances convergente $\sum_{t\in\mathbb{N}^n} c_t(x-\alpha)^t$, avec la convention usuelle d'écriture

$$(x-\alpha)^t = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i)^{t_i} \quad \text{pour } t = (t_1, \dots, t_n).$$

Pour tout $t \in \mathbb{N}^n$, on désigne alors par $f^{[t]}(\alpha)$ le coefficient de $(x-\alpha)^t$ dans cette série, appelé *dérivée divisée* d'ordre t de f au point α. Dans le cas où $\alpha = 0$, on note $|f|_r$ la norme du supremum de f sur $B(0, r)$. Rappelons que, si K est ultramétrique et si f est représentée par la série $\sum_{t\in\mathbb{N}^n} c_t x^t$ sur $B(0, r)$, alors on a $|f|_r = \max_{t\in\mathbb{N}^n} |c_t| r^t$. Pour $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$, on emploie aussi les notations condensées

$$t! = (t_1)! \dots (t_n)! \quad \text{et} \quad |t| = t_1 + \dots + t_n.$$

Si $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un autre élément de $\mathbb{N}^n$, on écrit $t < u$ (resp. $t \le u$) pour signifier $t_i < u_i$ (resp. $t_i \le u_i$) pour $i = 1, \dots, n$.

Pour tout sous-ensemble fini $\mathcal{E}$ de K et tout point a de $\mathcal{E}$, on définit

$$\delta(a, \mathcal{E}) = \min_{b\in\mathcal{E}\setminus a} |b-a| \quad \text{et} \quad \Delta(a, \mathcal{E}) = \prod_{b\in\mathcal{E}\setminus a} |b-a|$$

où $\mathcal{E} \setminus a$ est une notation abrégée pour $\mathcal{E} \setminus \{a\}$, l'ensemble $\mathcal{E}$ privé de a. On pose aussi

$$\delta(\mathcal{E}) = \min_{a\in\mathcal{E}} \delta(a, \mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \Delta(\mathcal{E}) = \min_{a\in\mathcal{E}} \Delta(a, \mathcal{E}).$$

On fixe enfin, dans toute la suite, des sous-ensembles finis $E_1, \dots, E_n$ de K, de cardinalités respectives $S_1, \dots, S_n \ge 2$ et un n-uplet d'entiers positifs $T = (T_1, \dots, T_n)$. On pose

$$E = E_1 \times \dots \times E_n \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \{t \in \mathbb{N}^n\,;\ t < T\}.$$

On pose aussi $L = (L_1, \dots, L_n)$ avec $L_i = S_i T_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On définit

$$\delta(E) = \big(\delta(E_1), \dots, \delta(E_n)\big) \quad \text{et} \quad \Delta(E) = \big(\Delta(E_1), \dots, \Delta(E_n)\big)$$

et, pour chaque $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E$, on pose

$$\delta_\alpha = \big(\delta(\alpha_1, E_1), \ldots, \delta(\alpha_n, E_n)\big).$$

Comme ce sont des n-uplets de nombres réels positifs, les expressions $\delta(E)^t$, $\Delta(E)^t$ et δ_α^t ont un sens pour tout $t \in \mathbb{Z}^n$.

Dans le cas ultramétrique, notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Supposons K ultramétrique. Soit $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs tel que $E \subset B(0, \rho)$, et soit Ω un sous-ensemble de K^n tel que, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E$, il existe $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ avec*

$$(1.1) \qquad |\omega_i - \alpha_i| < \delta(\alpha_i, E_i) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Alors, pour tout polynôme $P \in K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$ vérifiant $\deg_{x_i} P < L_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, on a

$$|P|_\rho \le \frac{\rho^L}{\Delta(E)^T \delta(E)^T} \max_{(\omega,t)\in\Omega\times\mathcal{T}} \big|P^{[t]}(\omega)\big|\, \delta(E)^t.$$

En vertu de la définition des nombres $\delta(\alpha_i, E_i)$, un même point ω de K^n ne peut vérifier la condition (1.1) pour plus d'un point α de E. Donc, dans l'énoncé du théorème 1.1, quitte à remplacer Ω par un sous-ensemble plus petit, on peut supposer que cette condition (1.1) détermine une bijection entre E et Ω. Dans ce cas, on dit que Ω est une *perturbation* de l'ensemble produit E. Cette notion généralise celle introduite par Robba au § III.2.5.3 de [9]. Dans la définition de Robba, la condition (1.1) est remplacée par $|\omega_i - \alpha_i| < \delta$ pour $i = 1, \ldots, n$, où $\delta = \min \delta(E_i)$.

Le corollaire suivant répond essentiellement à la conjecture formulée par Robba au § III.3.3 de [9].

COROLLAIRE 1.2. — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, supposons que $\rho_1 = \cdots = \rho_n$. Soient r et R des nombres réels positifs tels que $R \ge r \ge \rho_1$, soit M un entier positif vérifiant $M \le L_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et soit $f\colon B(0, (R, \ldots, R)) \to K$ une fonction analytique. Alors, on a*

$$(1.2) \quad |f|_{(r,\ldots,r)} \le \max\Big\{ C_1 \Big(\frac{r}{\rho_1}\Big)^M \max_{(\omega,t)\in\Omega\times\mathcal{T}} \big|f^{[t]}(\omega)\big|\, \delta(E)^t, \; C_2 \Big(\frac{r}{R}\Big)^M |f|_{(R,\ldots,R)} \Big\},$$

avec $C_1 = C_2 = \rho_1^{|L|} / (\Delta(E)^T \delta(E)^T)$.

Dans l'énoncé de sa conjecture, Robba suppose en plus que le corps K est de caractéristique 0, que les facteurs $E_1, \ldots, E_n$ de E ont même cardinalité $S_1 = \cdots = S_n$, que Ω est une perturbation de E au sens plus restreint rappelé plus haut, et qu'on a aussi $r = \rho_1$, $T_1 = \cdots = T_n$ et $M = L_1 = \cdots = L_n$.

Sous ces hypothèses, il propose que (1.2) est vrai avec $C_1 = (\rho_1/\delta)^{M-1}$ et $C_2 = 1$, où $\delta = \min \delta(E_i)$. Cette valeur de C_1 se compare à celle du corollaire 1.2 puisque, sous les mêmes hypothèses, cette dernière est majorée par $(\rho_1/\delta)^{|L|}$. Par contre, la valeur conjecturée pour C_2 est incorrecte pour $n \geq 2$ et, comme on le verra au § 6, on ne peut espérer améliorer nettement la constante C_2 du corollaire ni avec les hypothèses additionnelles de [9] indiquées ci-dessus, ni en se restreignant aux fonctions analytiques f qui vérifient $f^{[t]}(\omega) = 0$ pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times \mathcal{T}$.

Le corollaire suivant généralise le théorème III.4.1 de [9].

Corollaire 1.3. — *Supposons K ultramétrique. On fixe un sous-corps localement compact F de K. On note q la cardinalité de son corps résiduel, et λ le générateur > 1 de son groupe de valuation $|F^\times|$. Soient $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ et $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ des n-uplets d'éléments de $|F^\times|$ avec $\delta < \rho$, et soit Ω un sous-ensemble de K^n qui rencontre le polydisque $B(z, \delta)$ pour tout $z \in F^n \cap B(0, \rho)$. On pose $d = \log_\lambda(q)$, $M_i = (\rho_i/\delta_i)^d T_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et $M = M_1 + \dots + M_n$. Alors, pour tout polynôme $P \in K[x]$ vérifiant $\deg_{x_i} P < M_i$ pour $i = 1, \dots, n$, on a*

$$|P|_\rho \leq \lambda^{M/(q-1)} \max_{(\omega,t)\in\Omega\times\mathcal{T}} \left|P^{[t]}(\omega)\right| \delta^t.$$

On verra au § 5 comment une version ultramétrique du critère de Waldschmidt-Moreau permet de déduire le corollaire 1.2 du théorème 1.1. De la même façon, on trouve que le corollaire 1.3 implique les lemmes de Schwarz 4 et 5 de l'appendice 1 de [12] par D. Bertrand.

Dans le cas complexe, on démontre des résultats analogues :

Théorème 1.4. — *Supposons $K = \mathbb{C}$. Soit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs tel que $B(\alpha, 2\delta_\alpha) \subseteq B(0, \rho)$ pour tout $\alpha \in E$. De plus, soient m un entier positif et Ω un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ vérifiant l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

(a) *pour tout $\alpha \in E$, l'ensemble Ω rencontre $B(\alpha, \frac{1}{30}\delta(E))$ et on a*

$$m \geq 4n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i} \log_2(3n);$$

(b) *pour tout $\alpha \in E$, l'ensemble Ω rencontre $B(\alpha, \frac{1}{15}\delta_\alpha)$ et on a*

$$m \geq 3n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i} \log_3(3nS_i).$$

Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ vérifiant $\deg_{x_i} P < L_i/m$ pour $i = 1, \dots, n$, on a

$$|P|_\rho \leq 2^{m|T|} \frac{(8\rho)^L}{\Delta(E)^T \delta(E)^T} \max_{(\omega,t)\in\Omega\times\mathcal{T}} \left|P^{[t]}(\omega)\right| \delta(E)^t.$$