Bull. Soc. math. France
130 (3), 2002, p. 409–456

SURFACES KÄHLÉRIENNES DE VOLUME FINI ET ÉQUATIONS DE SEIBERG-WITTEN

PAR YANN ROLLIN

À Hélène

RÉSUMÉ. — Soit $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ une surface complexe réglée. Nous introduisons des métriques de volume fini sur M dons les singularités sont paramétrisées par une structure parabolique sur le fibré $\mathcal{E}$. Nous généralisons alors un résultat de Burns-de Bartolomeis et Le Brun, en montrant que l'existence de métriques kählériennes singulières, de volume fini, à courbure scalaire constante négative ou nulle sur M est équivalente à une condition de polystabilité parabolique sur $\mathcal{E}$; de plus ces métriques proviennent toutes de quotients de volume fini de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$. En outre nous produisons une solution des équations de Seiberg-Witten pour une métrique singulière de volume fini afin de démontrer ce théorème.

ABSTRACT (*Kähler surfaces of finite volume and Seiberg-Witten equations*)

Let $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ be a complex ruled surface. We introduce metrics of finite volume on M whose singularities are parametrized by a parabolic structure over $\mathcal{E}$. Then, we generalise results of Burns-de Bartolomeis and Le Brun, by showing that the existence of a singular Kähler metric of finite volume and constant non positive scalar curvature on M is equivalent to the parabolic polystability of $\mathcal{E}$; moreover these metrics all come from finite volume quotients of $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{CP}^1$. Therefore, we produce a solution of Seiberg-Witten equations for a singular metric g of finite volume in order to prove the theorem.

Texte reçu le 31 mai 2001, accepté le 16 novembre 2001

YANN ROLLIN, Department of Mathematics & Statistics, University of Edinburgh, J.C. Maxwell Building, King's Buildings, Mayfiel Road, EH9 3JZ Edinburgh, UK
E-mail : `rollin@maths.ed.ac.uk` • *Url :* `www.maths.ed.ac.uk/~rollin`

Classification mathématique par sujets (2000). — 53C20, 53C24, 32L05, 14D21.

Mots clefs. — Seiberg-Witten, surfaces réglées, métriques de Kähler, fibrés paraboliques, stabilité.

The author was supported by an EDGE grant, Research Training Network HPRN-CT-2000-00101, European Human Potential Programme.

1. Introduction

L'existence de métriques de Kähler à courbure scalaire constante sur les surfaces complexes est un problème ouvert dans lequel de récentes avancées mettent en évidence l'importance de la notion de stabilité (voir [6], [4] et [5]).

Dans le cas d'une surface géométriquement réglée de la forme $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe au-dessus d'une surface de Riemann hyperbolique compacte $\overline{\Sigma}$, Burns et de Bartolomeis ont démontré que les seules métriques kählériennes à courbure scalaire $s = 0$ sont des produits locaux ; par le théorème de Narashiman-Seshadri, cette condition est équivalente à la polystabilité de $\mathcal{E}$. Puis ce résultat a été généralisé par Le Brun au cas $s < 0$ en utilisant la théorie de Seiberg-Witten.

Mehta et Seshadri étendent les résultats de [14] en volume fini grâce à la théorie des *fibrés paraboliques* et une condition de *polystabilité parabolique* (pour une démonstration « à la Donaldson » [8] de leur résultat, *cf.* [2]). D'après [12], ces fibrés correspondent, en rang 2, aux cas où la surface réglée M est un quotient de volume fini $\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1$, provenant d'une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PU}(2)$, où $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$ est une surface de Riemann de type hyperbolique obtenue en enlevant un nombre fini de points appelés *points paraboliques* à une surface de Riemann compacte. En munissant le premier facteur de la métrique hyperbolique à courbure -1 et le second de la métrique de Fubini-Study à courbure $c > 0$, on en déduit une métrique kählérienne $\hat{g}$ à courbure scalaire $s = 2(c-1)$ sur M. Dans des coordonnées locales adaptées $(t, \theta, u) \in \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{CP}^1$ sur les bouts de M, où u est une coordonnée affine sur $\mathbb{CP}^1$, la métrique $\hat{g}$ est donnée par

$$\hat{g} = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}\theta^2 + \frac{4/c}{(1+|u|^2)^2}|\mathrm{d}u - i\alpha u \mathrm{d}\theta|^2, \tag{1}$$

où $\alpha \in [0, 1[$ est le *poids* de cette singularité appelée *bout parabolique.* Nous allons étendre les résultats de [6] et [4] à ce cadre de volume fini en supposant que les métriques considérées sont asymptotiques au sens C^2 au modèle local défini par (1).

Théorème A. — *Soit $\mathcal{E} \longrightarrow \overline{\Sigma}$ un fibré parabolique holomorphe tel que $\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{P_i\}$ soit hyperbolique. Soit $M = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ la surface complexe réglée associée restreinte au-dessus de Σ. Alors M admet une métrique kählérienne g^{K} à courbure scalaire constante $s \leq 0$ asymptotique au modèle local si et seulement si le fibré $\mathcal{E}$ est paraboliquement polystable. Dans ce cas, la métrique g^{K} se déduit à un biholomorphisme et une constante près du modèle $(\Sigma \times_\rho \mathbb{CP}^1, \hat{g})$ où $\rho : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{PU}(2)$ est une représentation associée au fibré parabolique polystable $\mathcal{E}$.*

Remarque. — Si g^{K} admet au moins une singularité, son comportement asymptotique impose que la constante du théorème soit égale à 1.

On rencontre la difficulté majeure de la démonstration dans le cas $s < 0$, où pour procéder suivant la méthode de Le Brun on doit extraire une solution (A, ψ), suffisamment régulière, des équations de Seiberg-Witten

$$D_A\psi = 0, \quad F_A^+ = q(\psi)$$

pour une métrique g asymptotique au modèle local et la structure spin^c canonique de M. En l'absence de singularités, Le Brun utilise la théorie des invariants de Seiberg-Witten sur les variétés compactes, ce qui n'est pas le cas de M. Pour traiter ce problème, on montre dans la section 2 que lorsque les poids des singularités sont rationnels, M admet une compactification orbifold $\overline{M} = M \cup D$, où D est une réunion de diviseurs de la forme $\mathbb{CP}^1/\mathbb{Z}_q$, sur laquelle on peut approximer g par une suite de métriques lisses g_j. On définit alors les équations de Seiberg-Witten perturbées sur $\overline{M}$ pour chaque métrique g_j par

$$D_A\psi = 0, \quad (F_A + 2i\pi\varpi_j)^+ = q(\psi),$$

où les perturbation ϖ_j se concentrent vers le courant d'intégration sur D. En calculant l'invariant des équations de Seiberg-Witten qui dépend d'une certaine *condition de chambre* pour la métrique g_j, nous obtiendrons une suite de solutions (A_j, ψ_j) que nous ferons converger vers une solution (A, ψ) des équations non perturbée pour la métrique limite g grâce au théorème suivant :

Théorème B. — *Soit g une métrique sur M asymptotique au modèle local $\hat{g}$ avec des poids $\alpha(P_i)$ rationnels et soit g_j la suite d'approximation de g sur $\overline{M}$. Soit (A_j, ψ_j) une suite de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées associées à la structure* spin^c *canonique induite par la structure complexe et aux métriques g_j sur $\overline{M}$. Alors quitte à faire des changements de jauge et à extraire une sous-suite, (A_j, ψ_j) converge au sens C^∞ sur tout compact de M vers une solution des équations non perturbées (A, ψ) pour la métrique g vérifiant*

- $A = \hat{A} + a$ *avec* $a \in L_1^2(g)$,
- $\psi \in L_1^2(g)$ *relativement à* $\nabla_{\hat{A}}$,

où $\hat{A}$ est une connexion induite par le modèle local kählérien $\hat{g}$ sur le fibré déterminant $L = K_M^{-1}$ de la structure spin^c *canonique.*

Remarques. — On pourra se référer à [3] pour une autre application des équations de Seiberg-Witten à des métriques d'Einstein de volume fini.

• Il serait naturel que l'existence de la solution (A, ψ) obtenue par ce théorème soit assurée par une théorie de Seiberg-Witten développée directement pour les métriques asymptotiques au modèle local. Notons que la construction de l'espace des modules correspondant et la question de sa compacité posent des problèmes techniques importants que notre méthode ne résout pas (*cf.* par exemple [11] pour des métriques asymptotiquement plates).

• La perturbation ϖ_j est nécessaire pour que la connexion A soit définie sur le « bon fibré » et s'explique au niveau des équations par le fait que la métrique g apparaît comme une limite de métriques sur la variété compacte moins une *bulle* de courbure positive.

La première étape dans la démonstration du théorème B (*cf.* section 3) consiste à développer une théorie de Hodge pour les métriques g et g_j *via* des inégalités de Poincaré uniformes. À l'aide d'un lemme de Poincaré local près de D pour la cohomologie L^2, on démontre un isomorphisme

$$\mathrm{H}^k_{L^2}(M) \simeq \mathrm{H}^k_{\mathrm{DR}}(\overline{M}),$$

puis on démontre pour $k = 1$ ou 2 que les représentant g_j-harmoniques d'une classe de cohomologie convergent vers le représentant g-harmonique L^2 sur tout compact de M. À partir de là on possède tous les outils nécessaires pour faire converger les connexions, pour démontrer le théorème au § 4.2 puis pour calculer l'invariant de Seiberg-Witten des métriques g_j au § 4.5. Dans le cas de poids irrationnels, on n'a plus de compactification orbifold adéquate et on doit faire une convergence « en deux temps » en commençant par approximer les poids irrationnels par des poids rationnels (*cf.* § 4.4).

Sur les éclatements de surfaces réglées. — La structure parabolique, en chaque point P *non trivial* d'un fibré $\mathcal{E}$ (*cf.* § 2.2 pour la définition), détermine une droite complexe de $\mathcal{E}_P$, donc un point Q de de la surface compacte $\widehat{M} = \mathbb{P}(\mathcal{E})_{\overline{\Sigma}}$ et un poids $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Le problème d'existence de métriques de Kähler à courbure scalaire constante sur l'éclatement $\widetilde{M}$ de $\widehat{M}$ aux points Q_i a été abordé par Le Brun et Singer lorsque $\widehat{M}$ possède des champs de vecteurs holomorphes périodiques et $s = 0$: suivant [5], de telles métriques existent si et seulement si $\mathcal{E}$ est paraboliquement polystable.

La forme de Kähler ω de la métrique $\hat{g}$, bien que singulière sur $\widehat{M}$, correctement interprétée comme un courant positif (*cf.* [7]), se relève en un courant positif $\widehat{\omega}$ appelé *transformée stricte* de ω sur l'éclatement $\widetilde{M}$ tel que

$$0 < \alpha = \frac{\widehat{\omega}\cdot[E]}{\widehat{\omega}\cdot[F]},$$

avec E le diviseurs exceptionel au point Q et F une fibre générique. Cette identité est précisément celle vérifiée par les classes de Kähler considérées dans [5] et ceci constitue une indication supplémentaire mettant en évidence le lien entre la notion de stabilité et le problème d'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante sur les surfaces complexes.

Je tiens à remercier tout particulièrement Olivier Biquard pour l'ensemble des discussions que j'ai eues avec lui sur ce sujet.

2. Surfaces kählériennes réglées modèles

2.1. Un exemple fondamental. — Voici tout d'abord une famille de surfaces complexes réglées construites à partir de représentations unitaires du groupe fondamental d'une surface de Riemann de volume fini. Ces exemples sont essentiels dans la théorie des fibrés parabolique stables comme nous le verrons au § 2.2.2 où nous citerons le théorème important de Mehta-Seshadri ; en outre ces exemples possèdent des métriques kählériennes « modèles » à courbure scalaire constante avec des singularités que nous étudierons précisément au § 2.3 et que nous appellerons *bouts paraboliques.*

2.1.1. Surfaces de Riemann hyperboliques de volume fini. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agissant librement et avec covolume fini sur le demi plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{\xi \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}\,\xi > 0\}$; le quotient est une surface de Riemann $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$, de groupe fondamental Γ, munie de la métrique kählérienne g^Σ complète de volume fini à courbure -1 induite par la métrique de Lobachevsky. Le groupe Γ agit également sur le bord à l'infini $\partial_\infty\mathbb{H}^2$ du demi-plan de Poincaré. Puisque Γ agit avec covolume fini, le stabilisateur d'un point du bord est soit trivial, soit, pour un nombre fini de points P appelés *points paraboliques*, égal à $\langle\tau\rangle \simeq \mathbb{Z}$, où τ est un élément parabolique de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On peut donc, quitte à conjuguer τ par une homographie, supposer qu'il est donné par $\tau : \xi \mapsto \xi + u$ où $\xi \in \mathbb{H}^2$ et $u \in \mathbb{R}$; pour simplifier on supposera même que $u = 2\pi$. Au voisinage de P, le quotient $\mathbb{H}^2/\Gamma$ est isomorphe à $I_a/\langle\tau\rangle$, où $I_a = \{\xi \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}\,\xi > a\}$ avec $a > 0$ suffisamment grand. On définit alors un isomorphisme entre le disque épointé $\Delta_a^* = \{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < |z| < \mathrm{e}^{-a}\}$ et $I_a/\langle\tau\rangle$ par

$$I_a/\langle\tau\rangle \longrightarrow \Delta_a^*, \quad \xi \longmapsto z = \mathrm{e}^{i\xi}; \tag{2}$$

en utilisant le plongement holomorphe $\Delta_a^* \subset \Delta_a$, ce qui revient à ajouter le point P correspondant à 0 dans le modèle du disque, on obtient finalement la compactification holomorphe $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{P_i\}_{1\le i\le k}$.

En partant de la métrique de Lobachevsky donnée par

$$g^{\mathbb{H}^2} = \frac{|\mathrm{d}\xi|^2}{|\xi - \bar{\xi}|^2},$$

on calcule aisément la métrique induite sur le disque épointé :

$$g^{\Delta^*} = \frac{|\mathrm{d}z|^2}{|z|^2 \cdot \ln^2|z|}.$$

Cette métrique possède une singularité en 0 appelée *cusp.* Nous utiliserons souvent un autre système de coordonnées locales $(t,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur les bouts de Σ défini par $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $t = \ln(-\ln|z|)$; dans ces coordonnées

$$g^{\Delta^*} = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}\theta^2. \tag{3}$$