

DEUX COMPOSANTES DU BORD DE $\mathbf{I}_3$

PAR NICOLAS PERRIN

RÉSUMÉ. — Nous étudions deux nouvelles composantes irréductibles du bord de la variété $\mathbf{I}_3$ des instantons de degré 3. Nous décrivons $\mathbf{I}_3$ grâce aux transformations cubo-cubiques involutives déduites de la monade de Beilinson (ce sont des transformations de Cremona particulières).

Nous exhibons alors les deux composantes du bord par dégénérescence sur les transformations. Nous mettons en évidence la dualité qui les lie : les transformations cubo-cubiques de l'une sont les inverses de l'autre.

Nous décrivons en détail la géométrie associée et donnons ainsi des descriptions birationnelles de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 ainsi que des courbes de degré 9 et genre 6.

ABSTRACT (*Two components of the boundary of $\mathbf{I}_3$*). — We study two new components of the boundary of $\mathbf{I}_3$ the variety of degree 3 mathematical instantons. We describe $\mathbf{I}_3$ thanks to the involutive cubo-cubic transformations induced by Beilinson's monad (these are particular Cremona transformations).

We then exhibit the two boundary components by making the transformations degenerate. We show that the two components are in duality : the cubo-cubic transforms of the first component are the inverse of those of the second one.

We also describe in detail the associated geometry. In particular we give a birational description of the moduli space of genus 2 and degree 7 curves and of genus 6 and degree 9 curves.

Texte reçu le 27 juin 2001, révisé le 1^{er} février 2002, accepté le 8 mars 2002

NICOLAS PERRIN, Université de Versailles, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles Cedex (France) • *E-mail* : perrin@math.uvsq.fr • *Url* : <http://www.math.uvsq.fr/~perrin>

Classification mathématique par sujets (2000). — 14D20.

Mots clefs. — Instantons, espaces de modules de faisceaux et de courbes, transformations birationnelles de l'espace projectif.

Introduction

Un instanton E de degré n est un fibré vectoriel stable de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ tel que $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = n$ et tel que le groupe $H^1 E(-2)$ soit nul. La variété $\mathbf{I}_n$ des instantons de degré n est donc un ouvert de l'espace des modules $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, n, 0)$ des faisceaux sans torsion semi-stables de classes de Chern $(0, n, 0)$. Dans cet article nous nous intéressons au bord de $\mathbf{I}_n$ dans la variété projective $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, n, 0)$.

On ne sait décrire ce bord que pour $n = 1$ [2] et $n = 2$ [12]. La variété $\mathbf{I}_3$ est de dimension 21. Elle a été étudiée par G. Ellingsrud et S.A. Strømme [5] qui ont prouvé son irréductibilité, et par L. Gruson et M. Skiti [9] qui ont montré qu'elle est birationnelle aux réseaux de quadriques de $\mathbb{P}^{3\vee}$. Au vu des résultats de [12], L. Gruson et G. Trautmann ont conjecturé que le bord de $\mathbf{I}_3$ a huit composantes irréductibles toutes en codimension 1 (voir remarque 3.6.8 pour plus de détails sur cette conjecture). Dans [9], les auteurs mettent également en évidence deux composantes irréductibles du bord de $\mathbf{I}_3$ correspondant à des diviseurs des réseaux de quadriques. Nous donnons ici une généralisation de ces réseaux et décrivons deux nouvelles composantes irréductibles $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de la variété des instantons de degré 3 qui sont « symétriques » l'une de l'autre.

Considérons la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ des faisceaux obtenus comme noyau d'une flèche surjective de E'' vers $\theta(2)$ où E'' est un instanton de degré 1 et θ est une theta-caractéristique ayant pour support une conique lisse. Cette famille est contenue dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 0)$. Considérons par ailleurs un ouvert $\mathbf{U}$ (que l'on définira plus loin) de $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 2)$. Un faisceau général de $\mathbf{U}$ a deux points singuliers. Soit $\mathbf{U}'$ le fermé qui correspond aux faisceaux E'' de $\mathbf{U}$ dont le lieu singulier est un point double, nous montrons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. — (i) *La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est birationnelle à la variété des surfaces quintiques rationnelles réglées autoduales. Elle forme une composante du bord de $\mathbf{I}_3$.*

(ii) *La famille $\mathbf{U}$ est une fibration en $\mathbb{P}^9$ au-dessus du schéma des cubiques gauches irréductibles. Le fermé $\mathbf{U}'$ est décrit dans chaque fibre par une hypersurface irréductible de degré 6.*

(iii) *Il existe une application rationnelle naturelle, génériquement injective, du fermé $\mathbf{U}'$ dans $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 0)$ dont l'image $\partial\mathbf{I}_3^2$ est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$. L'application réciproque associée à un faisceau $E \in \partial\mathbf{I}_3^2$ son bidual $E'' \in \mathbf{U}'$.*

Pour prouver que ces familles sont adhérentes à la variété des instantons, nous montrons qu'elles peuvent être paramétrées par des diviseurs dans une généralisation des réseaux de quadriques (§1). Cette paramétrisation fait apparaître la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$.

Dans les deuxième et troisième paragraphes, nous étudions respectivement les familles $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$. Nous décrivons en particulier la géométrie de leurs éléments de saut. Rappelons que l'on appelle plan instable (resp. droite bisauteuse) de $E \in \mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 0)$ tout plan H (resp. toute droite L) tel que $h^0 E_H > 0$ (resp. telle que $h^1 E_L > 0$). La courbe des plans instables des faisceaux de ces deux composantes est ACM de degré 6 et de genre 3. La surface réglée recouverte par les droites bisauteuses est soit une quintique rationnelle, soit une sextique elliptique. Les éléments de saut des deux composantes sont reliés, ce qui traduit la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$. Elle s'exprime assez simplement en termes de transformations cubo-cubiques (voir §1). En effet, une courbe ACM de degré 6 et de genre 3 permet de définir une application birationnelle — appelée transformation cubo-cubique — de $\mathbb{P}^3$ dans lui-même. Son application réciproque est encore une transformation cubo-cubique (*i.e.* associée à une courbe ACM de degré 6 et de genre 3). La *dualité* se traduit par le fait que les transformations cubo-cubiques qui proviennent de $\partial\mathbf{I}_3^2$ sont les inverses de celles de $\partial\mathbf{I}_3^1$.

Dans le troisième paragraphe, nous étudions la famille $\mathbf{U}$ que nous décrivons explicitement ainsi que le fermé $\mathbf{U}'$ et le fermé de $\mathbf{U}$ des faisceaux E'' qui ne sont plus réflexifs. Nous donnons alors la courbe qui constitue le lieu singulier de E'' .

Enfin dans un dernier paragraphe, nous présentons deux situations géométriques remarquables reliées à notre étude. Nous donnons une description birationnelle de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 d'un espace projectif. Cette description et la formule d'Hürwitz permettent de retrouver le fait que $\mathbf{U}'$ est définie dans les fibres au-dessus des cubiques gauches par une hypersurface de degré 6.

PROPOSITION 0.2. — *L'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 de $\mathbb{P}^3$ est birationnellement isomorphe au quotient par PGL_2 de la variété $\mathbb{G}(2, H^0 \mathcal{O}_{S^2 \mathbb{P}^1}(3))$ des pincesaux de cubiques du plan $S^2 \mathbb{P}^1$.*

Nous exhibons également une famille $\mathfrak{J}$ de dimension 36 d'involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$ dans lui-même. Nous montrons que $\mathfrak{J}$ est birationnelle au schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{9,6}$ des courbes de degré 9 et de genre 6. Nous montrons par ailleurs :

PROPOSITION 0.3. — *L'espace des modules des courbes de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$ est birationnellement isomorphe au quotient par PGL_2 de la variété $\mathbb{G}(4, H^0 \mathcal{O}_{S^2 \mathbb{P}^1}(3))$ des sous-espaces vectoriels de dimension 4 de cubiques du plan $S^2 \mathbb{P}^1$.*

Remerciements. — Je tiens à remercier ici mon directeur de thèse LAURENT GRUSON pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

1. Construction et déformation de faisceaux

Dans ce paragraphe nous expliquons comment la suite spectrale de Beilinson (voir [13]) ramène les problèmes sur les faisceaux à des problèmes d'algèbre linéaire. Nous étudions alors ces questions d'algèbre linéaire et leurs traductions géométriques. En particulier, nous construisons ainsi des déformations de faisceaux.

1.1. Les transformations cubo-cubiques. — Soit R un espace vectoriel de dimension 3 et soient V et W deux espaces vectoriels de dimension 4. Une *transformation cubo-cubique* est un élément A de l'espace projectif

$$\mathbf{T} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(R \otimes V, W)^\vee).$$

C'est une application linéaire de R dans $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee) \times \mathbb{P}(W)}(1)$ dont l'image définit une sous-variété Π de $\mathbb{P}(V^\vee) \times \mathbb{P}(W)$. La projection p (resp. q) de Π sur $\mathbb{P}(V^\vee)$ (resp. $\mathbb{P}(W)$) est pour une transformation cubo-cubique générale l'éclatement de la courbe Y (resp. Y') ACM de degré 6 et de genre 3 donnée par la résolution

$$0 \rightarrow R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-4) \xrightarrow{A} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-3) \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow 0,$$

respectivement

$$0 \rightarrow R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-4) \xrightarrow{tA} V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) \rightarrow \mathcal{I}_{Y'} \rightarrow 0.$$

Cette construction décrit une application birationnelle de $\mathbb{P}(V^\vee)$ dans $\mathbb{P}(W)$. Si on échange les rôles de $V^\vee$ et de W , on a son application réciproque. Nous dirons qu'une transformation cubo-cubique associée à une courbe Y est involutive s'il existe un isomorphisme $\alpha : W \rightarrow V^\vee$ tel que $\alpha(Y') = Y$. La transformation cubo-cubique et son inverse sont alors définies par la même courbe.

Pour plus de détails sur les transformations cubo-cubiques, voir aussi [19, p. 179].

REMARQUE 1.1.1. — Le groupe $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$ agit sur $\mathbf{T}$. Il existe un bon quotient pour cette action qui est fibré principal homogène sous ce groupe sur un ouvert. Par ailleurs, sur l'ouvert des éléments de $\mathbf{T}$ qui définissent une courbe, il existe un morphisme f vers le schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{6,3}$ des courbes ACM de degré 6 et de genre 3 : à A on associe Y . Ce morphisme est sur cet ouvert le bon quotient de $\mathbf{T}$ par $\mathrm{PGL}(R) \times \mathrm{PGL}(W)$ (pour plus de détails, voir [6]).

1.2. Généralisation des réseaux de quadriques. — Dans la suite on identifie V à l'espace vectoriel $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Dans [9], la famille des instantons sans droite trisauteuse est identifiée à un ouvert des réseaux de quadriques de $\mathbb{P}^{3^\vee}$. Cette identification se fait grâce aux multiplications du module de Rao d'un faisceau $E \in \mathbf{I}_3$: pour un instanton général E , on a

$$h^1 E(-1) = 3, \quad h^1 E = 4 \quad \text{et} \quad h^1 E(1) = 1.$$

La multiplication $H^1 E \otimes V \rightarrow H^1 E(1)$ est non dégénérée, elle permet d'identifier $H^1 E$ à $V^\vee$. La multiplication

$$H^1 E(-1) \otimes V \longrightarrow H^1 E \simeq V^\vee$$

donne alors le réseau de quadriques.

Nous n'allons plus maintenant identifier directement $H^1 E$ à $V^\vee$ mais *garder en mémoire* cette identification par la donnée d'un morphisme (qui est un isomorphisme dans le cas des instantons) de $H^1 E$ dans $V^\vee$ et de sa « réciproque » de $V^\vee$ dans $H^1 E$. Les composantes du bord vont apparaître lorsque ces morphismes ne seront plus des isomorphismes. Ainsi, pour retrouver E , nous aurons besoin d'identifier $H^1 E$ (resp. $H^1 E(-1)$) à un espace vectoriel W (resp. R) de dimension 4 (resp. 3), d'un morphisme $R \rightarrow W \otimes V^\vee$ (une transformation cubo-cubique) et de deux morphismes $W \rightarrow V^\vee$ et $V^\vee \rightarrow W$ vérifiant les conditions de symétrie suivantes : la composée $R \rightarrow V^\vee \otimes V^\vee$ (resp. $R \rightarrow W \otimes W$) se factorise par $S^2 V^\vee$ (resp. $S^2 W$). Dans le cas des instantons, la première condition traduit le fait que la multiplication dans le module de Rao est associative. Nous faisons intervenir la seconde flèche pour conserver la symétrie : sur l'ouvert des instantons, la flèche de W dans $V^\vee$ est inversible et l'identification nous permet de faire jouer le même rôle à W et $V^\vee$. Nous avons ainsi une flèche de $V^\vee$ dans W (l'inverse de la précédente) telle que la composée $R \rightarrow W \otimes W$ se factorise par $S^2 W$.

Nous nous donnons donc pour généraliser les réseaux de quadriques trois flèches

$$R \otimes V \xrightarrow{\varphi} W, \quad W \xrightarrow{\psi} V^\vee, \quad V^\vee \xrightarrow{\psi'} W$$

qui vérifient les conditions de symétrie précédentes. Considérons ainsi la sous-variété $\mathbf{F}$ de $\mathbf{T} \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, V^\vee)) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^\vee, W))$ formée des triplets (φ, ψ, ψ') tels que les composées

$$R \otimes V \otimes V \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbf{1}_V} W \otimes V \xrightarrow{\psi \otimes \mathbf{1}_V} V^\vee \otimes V \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$R \otimes W^\vee \otimes W^\vee \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbf{1}_{W^\vee}} V^\vee \otimes W^\vee \xrightarrow{\psi' \otimes \mathbf{1}_{W^\vee}} W \otimes W^\vee \longrightarrow \mathbf{C}$$

se factorisent par $R \otimes S^2 V$ et $R \otimes S^2 W^\vee$ et tels que

$$\psi' \circ \psi = \lambda \mathbf{1}_W \quad \text{et} \quad \psi \circ \psi' = \mu \mathbf{1}_{V^\vee}.$$

Ces dernières conditions viennent de l'identification au niveau des instantons : ψ et ψ' sont dans ce cas inverses l'un de l'autre. En particulier, dès que l'un de ces deux morphismes n'est plus inversible, les composées doivent être nulles. Nous appelons $\mathbf{F}_{i,j}$ l'image réciproque dans $\mathbf{F}$ du localement fermé de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, V^\vee)) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V^\vee, W))$ formé des couples d'applications linéaires (ψ, ψ') de rangs i et j . La dernière condition impose que si $i \neq 4$ alors $j \leq 4 - i$. Un point général de $\bigcup_j \mathbf{F}_{i,j}$ pour i fixé différent de 4 est dans $\mathbf{F}_{i,4-i}$ que nous noterons $\mathbf{F}_i$. Notons $\mathbf{F}_4$ l'ouvert sur lequel ψ est inversible.