Bull. Soc. math. France
130 (4), 2002, p. 573–585

LES SHIFTS À POIDS DISSYMÉTRIQUES SONT HYPER-RÉFLEXIFS

PAR XAVIER DUSSAU

RÉSUMÉ. — Nous prouvons l'hyper-réflexivité du shift bilatéral S_ω sur $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$, lorsque le poids vérifie $\omega(n) = 1$ for $n \geq 0$ et $\lim_{n\to-\infty} \omega(n) = +\infty$.

ABSTRACT (*Dissymmetric bilateral weighted shifts are hyper-reflexive*)
We prove the hyper-reflexivity of the bilateral weighted shift S_ω on $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$, when the weight satisfies $\omega(n) = 1$ for $n \geq 0$, and $\lim_{n\to-\infty} \omega(n) = +\infty$.

1. Introduction

On appellera *poids* toute application $\omega : \mathbb{Z} \to]0, +\infty[$ vérifiant

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < +\infty.$$

Étant donné un poids ω, on introduit l'espace

$$\ell^2_\omega(\mathbb{Z}) := \Big\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ ; \ \|u\|_\omega = \Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 \omega(n)^2 \Big]^{1/2} < \infty \Big\}.$$

Muni du produit scalaire $[u, v] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot \overline{v_n}\, \omega(n)^2$, $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$ est un espace de Hilbert.

Texte reçu le 20 juillet 2001, accepté le 14 février 2002

XAVIER DUSSAU, Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex (France) • *E-mail :* `dussau@math.u-bordeaux.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 47B37.

Mots clefs. — Shift à poids, reflexivité.

Considérons dans $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$ le shift

$$S_\omega : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Cet opérateur est clairement borné et inversible, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\|S^n_\omega\| = \sup_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+p)}{\omega(p)}\cdot$$

Un poids ω est dit *dissymétrique* si

$$\omega(n) = 1 \text{ pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to-\infty} \omega(n) = +\infty.$$

Si H est un espace de Hilbert séparable, on peut identifier $\mathcal{B}(H)$ au dual de l'espace $\mathcal{C}^1(H)$ des opérateurs à trace, la dualité étant obtenue par la formule $\langle N, T\rangle = \mathrm{Tr}(TN)$ pour $N \in \mathcal{C}^1(H)$, $T \in \mathcal{B}(H)$. Ceci permet de considérer la topologie w^* sur $\mathcal{B}(H)$. L'algèbre w^*-fermée engendrée par un opérateur V sera notée $\mathcal{A}_V$.

Un opérateur $V \in \mathcal{B}(H)$ est dit *réflexif* si tout opérateur qui laisse invariant les sous-espaces fermés de H stables par V appartient à $\mathcal{A}_V$.

On note $\{V\}'$ le commutant de V.

Un sous-espace fermé F de H est *hyper-invariant* pour V si $R(F) \subset F$ pour tout $R \in \{V\}'$.

On dit que V est *hyper-réflexif* si tout opérateur qui laisse stable les sous-espaces hyper-invariants de V, commute avec V.

Nous montrons dans cet article le résultat suivant.

THÓRÈME 1. — *Si ω est un poids dissymétrique, le shift S_ω sur $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$ est hyper-réflexif.*

D'autres résultats d'hyper-réflexivité pour les shifts bilatéraux ont été obtenus récemment. L'auteur de cet article a prouvé dans [3], l'hyper-réflexivité du shift lorsque le poids vérifie la condition :

$$1 \leq \omega(n) \leq C\bigl(1 + |n|\bigr)^\alpha \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z},$$

le réel α étant une constante strictement positive. Ce cas m'avait été suggéré par J. Esterle, qui précédemment (voir [4]), avait montré l'hyper-réflexivité du shift sur certains poids très irréguliers (poids d'Apostol). Notons que l'hyper-réflexivité de S_ω entraîne la réflexivité de S_ω et S_ω^{-1}(voir la remarque 2 de [4]).

Un sous-espace fermé M de $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$ sera dit *invariant par translation* si $S_\omega(M) \cup S^{-1}_\omega(M) \subset M$. Comme le commutant de S_ω est l'algèbre w^*-fermée engendrée par S_ω et S_ω^{-1}(voir [9]), un sous-espace fermé F de $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$ est hyper-invariant pour S_ω seulement si il est invariant par translation.

Un sous-espace invariant par translation F qui vérifie $F \neq \{0\}$ et $F \neq \ell^2_\omega(\mathbb{Z})$ est dit *non trivial* (noté SEINT).

Soit ω un poids dissymétrique. Considérons

$$L^2_\omega(\mathbb{T}) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \,;\, \|f\|_\omega = \Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \cdot \omega(n)^2 \Big]^{1/2} < \infty \Big\}.$$

Alors l'application $\mathcal{F}$ de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui à f associe $(\widehat{f}(n))_n$ induit un isomorphisme isométrique entre $L^2_\omega(\mathbb{T})$ et $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$. De plus l'opérateur S'_ω : $f(\mathrm{e}^{i\theta}) \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} f(\mathrm{e}^{i\theta})$ sur $L^2_\omega(\mathbb{T})$ est unitairement équivalent au shift S_ω sur $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$. Soit $f \in L^2_\omega(\mathbb{T})$, $f \neq 0$; alors $E(f) := (\mathrm{vect}_{n\in\mathbb{Z}} T^n_\omega f)^-)$ est un sous-espace hyper-invariant pour l'opérateur S'_ω. Ainsi $\widehat{E(f)} := \mathcal{F}(E(f))$ est un SEINT si $E(f) \neq L^2_\omega(\mathbb{T})$.

J. Esterle a prouvé l'existence de SEINT dans le cas dissymétrique (voir [6]), en exhibant une fonction intérieure U telle que $E(U) \neq L^2_\omega(\mathbb{T})$.

La proposition suivante, qui sera démontrée au paragraphe 3, est le point de départ de notre article.

Proposition 1. — *Soit M un SEINT pour le shift S_ω sur $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$. Si l'opérateur $\widetilde{S}_\omega$ sur $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})/M$ défini par $\widetilde{S}_\omega(f+M) = S_\omega(f) + M$ est hyper-réflexif, alors S_ω est hyper-réflexif.*

Ainsi, il suffit de trouver un SEINT M pour lequel $\widetilde{S}_\omega$ est hyper-réflexif, pour obtenir l'hyper-réflexivité de S_ω.

Si $E(U) \neq L^2_\omega(\mathbb{T})$, il découle de la proposition 3.8 de [6] que l'opérateur

$$\Phi : f + UH^2(\mathbb{D}) \longrightarrow f + E(U)$$

est une injection de $H^2(\mathbb{D})/UH^2(\mathbb{D})$ dans $L^2_\omega(\mathbb{T})/E(U)$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \omega(-n)}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

ϕ est en plus inversible (voir prop. 3.8) et les opérateurs

$$\widetilde{S}_\omega : f + \widehat{E(U)} \to S_\omega f + \widehat{E(U)} \quad \text{et} \quad M_U : f + UH^2(\mathbb{D}) \to Sf + UH^2(\mathbb{D})$$

sont semblables. Grâce à l'article de V.V. Kapustin [7], nous connaissons un critère pour l'hyper-réflexivité de M_U ; ceci permet d'obtenir facilement l'hyper-réflexivité de S_ω lorsque $\lim_{n\to+\infty} \log \omega(-n)/\sqrt{n} = +\infty$.

Le point délicat est donc d'obtenir l'inversibilité de Φ sans l'hypothèse supplémentaire ci-dessus. On va montrer que si ω est dissymétrique, il existe toujours une mesure positive singulière ν sur le cercle unité qui s'annule sur les ensembles de Carleson, telle que $\Phi : H^2(\mathbb{D})/UH^2(\mathbb{D}) \to L^2_\omega(\mathbb{T})/E(U)$ soit bijective (U désignant la fonction intérieure associée à ν). Il faut pour cela étudier en détail $UH^2(\mathbb{D})^\perp$ car la méthode de [6], prop. 3.8, utilisée pour montrer la surjectivité de Φ quand $\lim_{n\to+\infty} \log \omega(-n)/\sqrt{n} = +\infty$ fait appel aux inégalités de Cauchy et ne permet pas de conclure lorsque $\sum_{n=1}^\infty 1/\omega^2(-n) = +\infty$.

2. Préliminaires

Dans cet article, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T}$ désigneront respectivement le disque unité ouvert et le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'espace $\{f \in L^2_\omega(\mathbb{T})\ ;\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour } n < 0\}$ s'identifie à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, qui est muni de la norme

$$\|f\|_2 = \Big[\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(r\mathrm{e}^{it})\big|^2 \mathrm{d}t\Big]^{1/2}.$$

Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, on note $f_* \in L^2(\mathbb{T})$ la fonction déterminée par les limites radiales de f. L'espace des fonctions holomorphes et bornées sur $\mathbb{D}$ est noté $H^\infty(\mathbb{D})$. Soit U une fonction intérieure singulière, c'est à dire une fonction intérieure qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Alors il existe une mesure μ positive singulière sur $\mathbb{T}$ telle que

$$U(z) = \exp\Big[-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \mathrm{d}\mu(\xi)\Big] \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Pour $0 \le r < 1$, on pose

$$K_U(r) = \sup_{\theta \in [-\pi,\pi]} \frac{1}{|U(r\mathrm{e}^{i\theta})|}.$$

Comme dans [6], nous allons devoir utiliser les hyperdistributions que nous redéfinissons ci-dessous.

On appelle *hyperdistribution*, toute fonction analytique ϕ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ telle que $\lim_{|z|\to+\infty} \phi(z) = 0$. On désigne par $\mathrm{HD}(\mathbb{T})$, l'ensemble de toutes les hyperdistributions. Soit $\phi \in \mathrm{HD}(\mathbb{T})$; alors on pose $\phi^+ = \phi_{|\mathbb{D}}$, $\phi^- = \phi_{|\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}}$. Les coefficients de Fourier de ϕ sont définis de la façon suivante.

$$\phi(z) = \begin{cases} +\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\phi}(n) z^{n-1} & \text{si } |z| < 1, \\ -\sum_{n\le 0} \widehat{\phi}(n) z^{n-1} & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

On pose

$$\mathrm{HD}^{(2)}(\mathbb{T}) := \Big\{\phi \in \mathrm{HD}(\mathbb{T})\ ;\ \sum_{n<0} \big|\widehat{\phi}(n)\big|^2 < +\infty\Big\}.$$

Soit U une fonction intérieure singulière et soit μ la mesure associée à U. On pose $U(\infty) = \lim_{|z|\to+\infty} U(z)$. On définit $U^* \in \mathrm{HD}(\mathbb{T})$ par la formule

$$U^*(z) = \frac{1}{U(z)} - \frac{1}{U(\infty)} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}.$$

On remarque que $U^* \in \mathrm{HD}^{(2)}(\mathbb{T})$ car $1/U$ est bornée sur $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$.

Soit ω un poids dissymétrique. On pose

$$\mathrm{HD}_\omega(\mathbb{T}) := \Big\{\phi \in \mathrm{HD}(\mathbb{T})\ ;\ \|\phi\|^*_\omega = \Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{\phi}(n)|^2}{\omega^2(-n)}\Big]^{1/2} < +\infty\Big\}.$$

On peut identifier $\mathrm{HD}_\omega(\mathbb{T})$ au dual de $L^2_\omega(\mathbb{T})$ en posant pour $f \in L^2_\omega(\mathbb{T})$, $\phi \in \mathrm{HD}_\omega(\mathbb{T})$

$$\langle f, \phi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\cdot\widehat{\phi}(-n). \tag{1}$$

D'après [6], p. 80, nous avons

$$\langle f,\phi\rangle = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} f(\xi)\Big[\phi^+(r\xi) - \phi^-\Big(\frac{\xi}{r}\Big)\Big]\mathrm{d}\xi.$$

On pose

$$E(U)^\perp = \big\{\phi \in \mathrm{HD}_\omega(\mathbb{T})\ ;\ \langle f,\phi\rangle = 0 \text{ pour } f\in E(U)\big\}.$$

Si $U^* \in \mathrm{HD}_\omega(\mathbb{T})$, nous avons en plus $U^* \in E(U)^\perp$ (voir [6], lemme 3.7). Ceci implique que $E(U) \neq L^2_\omega(\mathbb{T})$ et donc $\widehat{E(U)}$ est un SEINT de $\ell^2_\omega(\mathbb{Z})$. Posons

$$\begin{aligned} H^2_0(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}) \ := \Big\{ u \in H(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})\ ;\ u(z) = \sum_{n\le 0}\widehat{u}(n)z^{n-1} \\ \text{et}\quad \|u\|_2 = \Big[\sum_{n\le 0}\big|\widehat{u}(n)\big|^2\Big]^{1/2} < +\infty\Big\}. \end{aligned}$$

Soit $u \in H^2_0(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})$; alors $\lim_{r\to 1^-} u(\xi/r)$ existe pour presque tout $\xi\in\mathbb{T}$. La fonction limite qui appartient à $L^2(\mathbb{T})$, est notée u_*. Le dual de $H^2(\mathbb{D})$ s'identifie à $H^2_0(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})$ par la dualité

$$\langle f, u\rangle = \sum_{n\ge 0}\widehat{f}(n)\cdot\widehat{u}(-n).$$

On remarque que

$$\langle f,u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_*(\mathrm{e}^{it})u_*(\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t$$

et que cette dualité est la restriction de celle existant entre $L^2_\omega(\mathbb{T})$ et $\mathrm{HD}_\omega(\mathbb{T})$. On définit

$$UH^2(\mathbb{D})^\perp = \big\{\phi\in H^2_0(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})\ ;\ \langle f,\phi\rangle = 0 \text{ pour } f \in UH^2(\mathbb{D})\big\}.$$

Le résultat suivant est classique [2], mais nous en donnons une preuve pour la commodité du lecteur.

Proposition. — *Soit $u \in H^2_0(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})$; alors $u\in UH^2(\mathbb{D})^\perp$ si et seulement si il existe $g\in H^2(\mathbb{D})$ tel que*

$$\mathrm{e}^{it}g_*(\mathrm{e}^{it}) = U_*(\mathrm{e}^{it})u_*(\mathrm{e}^{it})\quad p.p.$$