

SOLUTIONS GLOBALES DE L'ÉQUATION DES ONDES SEMI-LINÉAIRE CRITIQUE À COEFFICIENTS VARIABLES

PAR SLIM IBRAHIM & MOHAMED MAJDOUB

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on s'intéresse à l'existence globale de solutions classiques et au sens de Shatah-Struwe de l'équation des ondes critique à coefficients variables en dimension d d'espace

$$\square_A u + |u|^{4/(d-2)}u = \partial_t^2 u - \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla_x u) + |u|^{4/(d-2)}u = 0, \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d,$$

où A est une fonction régulière à valeurs dans les matrices $d \times d$ définies positives, valant l'identité en dehors d'un compact fixe.

ABSTRACT (*Global solutions for the critical nonlinear wave equation in variable coefficients*)

In this work, we study the existence of both global smooth and Shatah-Struwe's solutions of the critical wave equation in variable coefficients in dimension d of space

$$\square_A u + |u|^{4/(d-2)}u = \partial_t^2 u - \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla_x u) + |u|^{4/(d-2)}u = 0, \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d,$$

where A is a regular function valued in the space of $d \times d$ positive definite matrix and which is the identity outside a fixed compact.

Texte reçu le 4 avril 2001, révisé le 21 décembre 2001, accepté le 7 février 2002

SLIM IBRAHIM, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Bizerte, Jarzouna 7021-Bizerte (Tunisie) • *E-mail* : slim.ibrahim@fsb.rnu.tn

MOHAMED MAJDOUB, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire 1060-Tunis (Tunisie) • *E-mail* : mohamed.majdoub@fst.rnu.tn

Classification mathématique par sujets (2000). — 35-XX, 35Lxx, 35L05.

Mots clefs. — Équation des ondes, inégalités de Strichartz, existence globale, cônes géodésiques.

1. Introduction

L'objectif de ce travail est d'établir des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème de Cauchy associé à l'équation des ondes semi-linéaire critique à coefficients variables en dimension $d \geq 3$

$$(1) \quad \square_A u + |u|^{p_c-1} u := \partial_t^2 u - \operatorname{div}(A(x) \nabla_x u) + |u|^{p_c-1} u = 0$$

sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$,

où $p_c = (d+2)/(d-2)$, A est une fonction C^∞ à valeurs dans les matrices $d \times d$ symétriques et vérifiant l'hypothèse

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} c_0 |\xi|^2 \leq A(x) \xi \cdot \xi \leq c_0^{-1} |\xi|^2, & \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \\ A(x) \equiv \operatorname{Id}, & \forall x \in \mathbb{R}^d, |x| \geq R_0, \end{cases}$$

pour des constantes $R_0 > 0$ et $0 < c_0 \leq 1$ données. L'opérateur $\operatorname{div}(A(x) \nabla_x \cdot)$ représente alors une perturbation locale en espace de l'opérateur Laplacien Δ_x . Lorsque $A(x) \equiv \operatorname{Id}$, cas constant, nous retrouvons l'opérateur d'Alembertien

$$\square = \partial_t^2 - \Delta_x \quad \text{sur } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d.$$

L'équation (1) est un cas particulier d'une classe plus générale d'équations du type

$$(2) \quad \square_A u + |u|^{p-1} u = 0,$$

où p est un réel dans $]1, +\infty[$.

La question d'existence globale de solutions pour le problème de Cauchy associé à l'équation (2) est fondamentale. Elle a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années soixante. Rappelons d'abord les résultats dans le cas constant.

- Pour $1 < p < p_c$, cas sous-critique, J. Ginibre et G. Velo [4] ont démontré que pour des données

$$(u(0), \partial_t u(0)) \in (\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)) \times L^2(\mathbb{R}^d),$$

il existe une unique u ,

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d)), \quad \partial_t u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)),$$

solution forte du problème de Cauchy associé à l'équation (2).

- Pour $p = p_c$, cas critique, ce problème a d'abord été résolu dans le cas radial par M. Struwe [18], puis dans le cas général par M. Grillakis [6], [7] pour les dimensions d telles que $3 \leq d \leq 5$ et récemment J. Shatah-M. Struwe [15], [16] l'ont prouvé pour les autres dimensions. Précisément, ils ont prouvé l'existence globale et l'unicité de solutions dans la classe dite de Shatah-Struwe

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap L_{\text{loc}}^{p_c}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d)), \quad \partial_t u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)).$$

La condition inhabituelle, $u \in L_{\text{loc}}^{p_c}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$, permet de considérer le terme $|u|^{p_c-1} u$ dans (1) comme un terme source dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$ et d'obtenir des estimations d'énergie.

La question d'unicité de solutions dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$ et non pas dans $L_{\text{loc}}^{p_c}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))$ est encore ouverte. Cependant H. Bahouri et P. Gérard [1] ont montré la stabilité des solutions de Shatah-Struwe pour la convergence faible dans l'espace d'énergie.

- Pour $p > p_c$, cas sur-critique, le problème d'existence et d'unicité de solutions fortes est ouvert. Cependant dans un travail récent, G. Lebeau [13] a obtenu un résultat d'instabilité pour les solutions radiales et à valeurs réelles d'une équation des ondes sur-critique dans $\mathbb{R}^3$. Pour une bibliographie détaillée, voir C. Zuily [19].

Dans le cas variable, L.V. Kapitanski [11], [10] a établi l'existence globale de solutions fortes pour les puissances sous-critiques.

Dans ce travail nous nous intéressons au cas où $p = p_c$. Signalons d'abord que dans [12], Kapitanski a obtenu des résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles. Notre premier résultat concerne l'existence globale de solutions régulières. Précisément, nous montrons les résultats énoncés dans [8].

THÉOREME 1.1. — *On suppose que $3 \leq d < 6$, et que la fonction $A(x)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$. Alors si $s > \frac{1}{2}d + 2$ et $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$, le problème*

$$(3) \quad \square_A u + |u|^{p_c-1}u = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0, \quad \partial_t u(0, \cdot) = u_1,$$

admet une unique solution globale $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

REMARQUE 1.1. — 1) La restriction sur la dimension est due à l'utilisation de l'injection de Sobolev $W^{m, 2d/(d-2)}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour $m > \frac{1}{2}d - 1$.

2) La preuve du théorème 1.1 est basée sur un résultat de base d'existence locale et d'explosion (voir lemme 3.3).

La démonstration du théorème 1.1 se fait par l'absurde, en montrant des estimations L^∞ sur la solution maximale u . Pour ce faire, nous adoptons malgré sa rigidité, la méthode de J. Shatah-M. Struwe [15]. Cette méthode s'appuie sur un résultat clé, exprimant la non concentration de la partie non linéaire de l'énergie (et par suite de l'énergie). L'idée consiste à exhiber des hypersurfaces de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$ dépendant de la géométrie de l'opérateur $\square_A$ et qui jouent, dans le cas constant, le même rôle que les cônes d'ondes usuels. Ce résultat sera souvent utilisé avec les estimations *a priori* suivantes, vérifiées par la solution du problème linéaire.

Soit $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ et notons par v la solution de

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t^2 v + G(t)v = f(t) & \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^d, \\ v(0) = v_0, \quad \partial_t v(0) = v_1, \end{cases}$$

où $f(t) \in L^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ et $G(t)$ est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 2 dépendant d'une manière C^∞ en t , ayant un symbole principal G_2 vérifiant la condition d'uniforme ellipticité $G_2(t, x, \xi) \geq c|\xi|^2$, et tel que

tous les termes $G_{2-j}, j = 0, 1, \dots$, du développement asymptotique du symbole principal sont indépendants de x en dehors d'une boule fixe de $\mathbb{R}^d$. Alors nous avons :

LEMME 1.1 (estimation de l'énergie). — Soit $(v_0, v_1) \in H^{s+1} \times H^s$. Le problème (4) admet une unique solution v satisfaisant

$$(5) \quad \sup_{t \in [0, T]} (\|\partial_t v(t)\|_{H^s} + \|\nabla v(t)\|_{H^s}) \leq c(s) \left(\|v_1\|_{H^s} + \|\nabla v_0\|_{H^s} + \int_0^T \|f(t)\|_{H^s} dt \right),$$

où la constante $c(s) > 0$ est indépendante de v_0, v_1, f .

LEMME 1.2 (inégalités de Strichartz). — Soit $(v_0, v_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$. Pour tout couple de Strichartz (q, r) , i.e

$$(S) \quad \frac{1}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2} - 1, \quad q \geq \frac{d+1}{d-1} \quad \text{et} \quad q > 2 \quad \text{si} \quad d = 3,$$

la solution v du problème (4) vérifie

$$(6) \quad \|v\|_{L^q([0, T], L^r(\mathbb{R}^d))} \leq c_q \left(\|v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \right),$$

avec une constante universelle c_q .

Les inégalités de Strichartz ont été établies par Ginibre-Velo [5] dans le cas constant et Kapitanski [9] dans le cas où la métrique G satisfait les hypothèses décrites ci-dessus. Signalons enfin que dans le cas de coefficients peu réguliers, H. Smith a démontré dans un travail récent (voir [17]) les estimations de Strichartz pour des opérateurs à coefficients seulement $\mathcal{C}^{1,1}$.

Ces estimations seront souvent couplées avec un lemme d'absorption que nous rappelons.

LEMME 1.3 (lemme de bootstrap). — Soit $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que

$$X(t) \leq a + bX(t)^\theta,$$

avec $a, b > 0, \theta > 1$,

$$a < \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \frac{1}{(\theta b)^{1/\theta}} \quad \text{et} \quad X(0) \leq \frac{1}{(\theta b)^{1/(\theta-1)}}.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$X(t) \leq \frac{\theta}{\theta-1} a.$$

Dans notre second résultat, nous nous intéressons aux solutions fortes au sens de Shatah-Struwe. Précisément, nous montrons le

THÉORÈME 1.2. — Soient $d \geq 3$ et $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$. L'équation (1) admet une unique solution

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap L_{\text{loc}}^{p_c}(\mathbb{R}, L^{2p_c}(\mathbb{R}^d))); \quad \partial_t u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$$

vérifiant $u(0, \cdot) = u_0$ et $\partial_t u(0, \cdot) = u_1$.

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes. D'abord, nous montrons par une méthode de point fixe, l'existence locale d'une solution au sens de Shatah-Struwe. Puis, nous prouvons l'unicité de telles solutions comme dans [16]. Enfin, en utilisant le lemme fondamental (lemme 3.2), nous prolongeons la solution locale.

Indiquons maintenant le plan de cet article. Dans le prochain paragraphe, nous rappelons les notions géométriques nécessaires à l'introduction des cônes géodésiques. Le paragraphe 3 est consacré à la preuve du théorème 1.1 : d'abord, un calcul précis sur ces cônes permet d'établir un lemme fondamental exprimant la non concentration de l'énergie locale. Ensuite, nous utilisons les inégalités de Strichartz pour obtenir des estimations L^∞ de la solution maximale du problème (3). Enfin, un résultat d'existence locale et d'explosion permet de conclure. Au dernier paragraphe, par une méthode du point fixe nous prouvons l'existence locale de solutions fortes du problème (3). L'unicité et l'existence globale sont obtenues via les inégalités de Strichartz. En appendice nous établissons une version localisée des estimations de Strichartz dans les cônes géodésiques. La preuve est basée sur une idée de Bahouri-Gérard.

Remerciements. — Les auteurs tiennent à remercier le professeur Hajer Bahouri d'avoir proposé cette question. Ils expriment aussi leurs remerciements au professeur Patrick Gérard pour ses remarques et ses suggestions. Ils remercient enfin le rapporteur anonyme pour sa contribution à l'élaboration de cette version finale de l'article.

2. Cônes géodésiques

Notons $a_{ij}(x)$ les coefficients de la matrice $A(x)$ et $a^{ij}(x)$ ceux de $A^{-1}(x)$. Nous munissons $\mathbb{R}^d$ de la métrique Riemannienne g définie à partir de la matrice $A^{-1}(x)$ par

$$g = \sum_{ij} a^{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$, et tous vecteurs $u, v \in T_x \mathbb{R}^d$, nous noterons par $g_x(u, v)$ le produit scalaire $\langle A^{-1}(x)u, v \rangle$ et par $\|\cdot\|_x$ la norme correspondante. Nous rappelons que la longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est

$$L(\gamma) = \int_{[a,b]} \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$