

ENSEMBLE OSCILLANT D'UN HOMÉOMORPHISME DE BROUWER, HOMÉOMORPHISMES DE REEB

PAR FRANÇOIS BÉGUIN & FRÉDÉRIC LE ROUX

RÉSUMÉ. — Un *homéomorphisme de Brouwer* est un homéomorphisme du plan, sans point fixe, préservant l'orientation. Le *théorème des translations planes* affirme qu'un tel homéomorphisme s'obtient toujours en « recollant des translations ». Dans cet article, nous introduisons un nouvel invariant de conjugaison des homéomorphismes de Brouwer, *l'ensemble oscillant*, pour tenter de décrire assez précisément la manière dont s'effectue le recollement des translations.

D'une part, nous utilisons la notion d'ensemble oscillant pour montrer que des homéomorphismes de Brouwer extrêmement semblables peuvent appartenir à des classes de conjugaison distinctes. Plus précisément, nous étudions les *homéomorphismes de Reeb* (*i.e.* les homéomorphismes de Brouwer qui préservent feuille par feuille un feuilletage de Reeb) ; nous montrons, par exemple, l'existence d'une infinité d'homéomorphismes de Reeb deux à deux non conjugués.

D'autre part, nous utilisons la notion d'ensemble oscillant pour caractériser les éléments d'une classe de conjugaison non triviale d'homéomorphismes de Brouwer : en un certain sens, nous donnons une caractérisation dynamique de « l'homéomorphisme de Brouwer le plus simple après la translation ».

Texte reçu le 26 novembre 2001, révisé le 13 juin 2002, accepté le 19 septembre 2002

FRANÇOIS BÉGUIN, Équipe de Topologie et Dynamique, Bâtiment 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail* : Francois.Beguin@math.u-psud.fr
FRÉDÉRIC LE ROUX, Équipe de Topologie et Dynamique, Bâtiment 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail* : frederic.le-roux@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 37E30, 58F25.

Mots clefs. — Homéomorphisme, plan, point fixe, translation, Brouwer.

ABSTRACT (*Oscillation set of a Brouwer homeomorphism, Reeb homeomorphisms*)

A *Brouwer homeomorphism* is a fixed-point-free orientation-preserving homeomorphism of the plane. The *plane translation theorem* states that one can get every such homeomorphism by “gluing translations”. In this paper, a new conjugacy invariant, *the oscillation set*, is introduced in an attempt to give a precise description of the way the translations are glued together.

On the one hand, the oscillating set is used to show that Brouwer homeomorphisms that seem extremely similar often fail to be conjugated. More precisely, homeomorphisms that preserve each leaf of that Reeb foliation, called *Reeb homeomorphisms*, are examined; we prove, for instance, that there exists an infinite number of Reeb homeomorphisms that fall into distinct conjugacy classes.

On the other hand, the oscillating set is used to characterize the elements of a non-trivial conjugacy class, getting a dynamical characterization of the “simplest non-trivial Brouwer homeomorphism”.

Table des matières

0. Introduction	151
Partie I. Ensemble singulier et ensemble oscillant	156
1. Quelques propriétés générales des homéomorphismes de Brouwer	156
2. Ensemble singulier d'un homéomorphisme de Brouwer	157
3. Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer	158
Partie II. Constructions d'homéomorphismes de Reeb exo- tiques	161
4. Construction d'homéomorphismes et de flots de Reeb par recollement de translations	162
5. Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Reeb	167
6. Une infinité (non dénombrable) de classes de conjugaison d'homéomorphismes de Reeb	175
7. Un homéomorphisme de Reeb qui n'est le temps 1 d'aucun flot ..	177
8. Un flot de Reeb dont le temps 1 n'est pas conjugué au temps 2 ..	177
Partie III. L'homéomorphisme de Brouwer « le plus simple après la translation »	179
9. Préliminaires	179
10. Dynamique sur l'ensemble singulier	181
11. Comportement de l'orbite d'un compact	183
12. Un lemme d'existence d'arcs uniformément non oscillants	185
13. Rectangles	191
14. Quadrillages	195
15. Un lemme pour affiner les quadrillages	198
16. Un lemme pour compléter les quadrillages	202

17. Construction de la conjugaison	203
Appendice: le théorème de Schoenflies-Homma	207
Bibliographie	209

0. Introduction

0.1. Les homéomorphismes de Brouwer ou « comment recoller des translations planes ». — On appelle *homéomorphisme de Brouwer* tout homéomorphisme du plan, qui préserve l'orientation, et qui n'a aucun point fixe. Ces homéomorphismes sont intéressants à au moins deux titres : d'une part ce sont les plus simples des homéomorphismes de surface non triviaux d'un point de vue dynamique, et d'autre part ils interviennent de manière naturelle dans l'étude des dynamiques plus complexes (par exemple, dans l'étude des homéomorphismes sans point fixe de l'anneau (voir [9], [12]), ou l'étude des homéomorphismes de surface au voisinage d'un point fixe isolé (voir [22])).

Pour analyser un système dynamique, une approche classique consiste à découper l'espace en morceaux sur chacun desquels la dynamique est triviale, puis à étudier la manière dont ces dynamiques triviales se recollent. Cette démarche est particulièrement utilisée pour comprendre des dynamiques peu récurrentes : citons, en dimension 1, l'étude des difféomorphismes de l'intervalle (voir [24]) ; en dimension 2, l'étude des connexions de selles (voir [27], [5], [6]), des difféomorphismes Morse-Smale (voir [19]) ou encore la classification analytique des germes de difféomorphismes holomorphes en un point fixe (recollement de cylindres d'Écalle, [8], [29]) ; en dimension 3, pour les champs de vecteurs, l'étude des connexions de selles, ou de la dynamique au voisinage d'une orbite homocline d'un point selle-centre (voir [2], [7]) ; citons enfin l'étude des difféomorphismes Morse-Smale en toute dimension (voir [28]). Nous allons utiliser cette approche par « recollement de dynamiques triviales » pour étudier les homéomorphismes de Brouwer.

Les homéomorphismes de Brouwer les plus simples sont les translations affines. Par ailleurs, le *théorème des translations planes* (voir [3], [12]) affirme que, pour tout homéomorphisme de Brouwer h , on peut recouvrir le plan par de « grands » ouverts invariants, simplement connexes, sur chacun desquels l'homéomorphisme h est conjugué à une translation (ces ouverts sont appelés *domaines de translation*). Ainsi, tout homéomorphisme de Brouwer peut être considéré comme un « recollement de translations ». En ce sens, étudier les homéomorphismes de Brouwer revient à comprendre les différentes manières de recoller des translations.

Une des conséquences du théorème des translations planes est que toutes les orbites d'un homéomorphisme de Brouwer tendent vers l'infini dans le passé et

le futur : il n'y a presque aucune forme de récurrence. Ceci pourrait laisser espérer une classification complète des homéomorphismes de Brouwer à conjugaison près. Cependant, de nombreux exemples ont montré que les orbites, individuellement simplissimes, d'un homéomorphisme de Brouwer pouvaient s'organiser globalement selon une dynamique complexe (voir [16], [4], [22]). Il existe en particulier des homéomorphismes de Brouwer qui ne peuvent être obtenus qu'en recollant une infinité de translations (autrement dit, le plan n'est pas recouvert pas un nombre fini de domaines de translation). Un des buts de cet article est de montrer que la situation est déjà très complexe quand on se limite aux homéomorphismes obtenus par recollement de deux translations.

0.2. La question du plongement d'un homéomorphisme de Brouwer dans un flot. — Un *flot* est une famille continue $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'homéomorphismes vérifiant la loi d'addition des temps ($h^t \circ h^s = h^{t+s}$). Le *temps 1 du flot* est alors l'homéomorphisme h^1 .

En 1934, B. Kerékjártó [18] a construit un premier exemple d'homéomorphisme de Brouwer qui n'est pas le temps 1 d'un flot. Pour prouver cette propriété, Kerékjártó invente la notion de *point singulier* (voir ci-dessous) : l'ensemble des points singuliers d'un homéomorphisme est un invariant de conjugaison ; l'ensemble singulier du temps 1 d'un flot doit donc être une réunion d'orbites du flot, donc une réunion disjointe de droites topologiques ; ce qui n'est pas le cas de son exemple.

L'exemple de Kerékjártó soulève naturellement la question suivante : tout homéomorphisme de Brouwer dont l'ensemble singulier est une réunion disjointe de droites topologiques peut-il être plongé dans un flot ? Dans [26], H. Nakayama a répondu négativement à cette question : il a exhibé un homéomorphisme de Brouwer obtenu par recollement de deux translations, dont l'ensemble singulier est la réunion de deux droites disjointes, mais qui ne préserve les feuilles d'aucun feuilletage, ce qui interdit d'être le temps 1 d'un flot.

Nous allons voir ci-dessous que la condition utilisée par Nakayama, elle non plus, n'est pas suffisante : il existe un homéomorphisme de Brouwer obtenu par recollement de deux translations, dont l'ensemble singulier est réunion de deux droites, qui préserve chaque feuille d'un feuilletage, mais qui n'est le temps 1 d'aucun flot. Ceci montre qu'il est très délicat de trouver des conditions pour qu'un homéomorphisme de Brouwer soit le temps 1 d'un flot.

0.3. L'ensemble oscillant. — L'exemple de Nakayama montre, en particulier, que l'ensemble singulier n'est pas un invariant complet pour la classification des homéomorphismes de Brouwer à conjugaison près. Nous allons introduire dans cet article un invariant plus fin que l'ensemble singulier : *l'ensemble oscillant*. Esquissons-en la définition.

Tout d'abord, un couple de points (M, N) est dit *singulier* si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un point Z , à distance inférieure à ε du point M , et ayant un

itéré positif $h^n(Z)$ (n grand) à distance inférieure à ε du point N . On considère alors les germes d'arcs c au point M qui contiennent de tels points Z : les itérés d'un tel arc c s'accumulent en N , et on peut regarder le comportement de la famille des itérés de c au voisinage du point N . Le couple (M, N) est dit *non oscillant* si ce comportement est le plus simple possible (c'est-à-dire si la situation ressemble à celle de la figure 1), pour au moins un arc c .

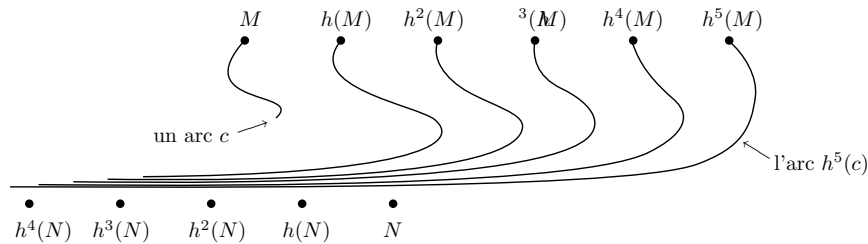


FIGURE 1. Un couple de points singuliers (M, N) non oscillant

0.4. L'ensemble oscillant permet de distinguer des dynamiques semblables. — Pour tester la finesse de notre invariant, nous allons nous intéresser à des homéomorphismes de Brouwer aussi simples que possible et aussi semblables les uns aux autres que possible : les homéomorphismes de Reeb. La dynamique de tout homéomorphisme de Reeb est représentée par la figure 2 : il s'agit des homéomorphismes sans point fixe qui préservent chaque feuille d'un *feuilletage de Reeb*. Le feuilletage de Reeb est le feuilletage du plan le plus simple après le feuilletage trivial (feuilletage du plan en droites horizontales). On obtient un feuilletage de Reeb en recollant deux copies du feuilletage trivial ; or tout homéomorphisme sans point fixe préservant chaque feuille du feuilletage trivial est conjugué à une translation ; donc les homéomorphismes de Reeb s'obtiennent tous en recollant deux translations.

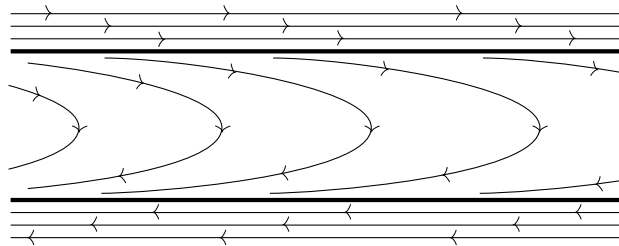


FIGURE 2. Un feuilletage de Reeb avec un choix d'orientation des feuilles