

PLATITUDE DU MODULE UNIVERSEL POUR GL_3 EN CARACTÉRISTIQUE NON BANALE

PAR JOËL BELLAÏCHE & ANIA OTWINOWSKA

RÉSUMÉ. — Soient F un corps p -adique, $G = GL_3(F)$. Pour χ un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique de G sur un anneau commutatif k , on introduit à la suite de Serre une représentation lisse M_χ de G sur k qui gouverne la théorie des représentations non ramifiées de G sur k . Nous prouvons que M_χ est plat sur k et que si p est inversible dans k , alors pour tout sous-groupe compact ouvert suffisamment petit U de G , le module M_χ^U est libre de rang fini sur k . Ceci était conjecturé par Lazarus. Comme corollaire, nous obtenons que si k est un corps de caractéristique différente de p , M_χ a même semi-simplification que la série principale non ramifiée de caractère χ , dont la structure est décrite par les travaux de Vignéras.

ABSTRACT (*Flatness of the universal module for GL_3*). — Let F be a p -adic field, $G = GL_3(F)$, and χ a character of the spherical Hecke algebra over a commutative ring k . We introduce, following Serre, a smooth representation of G over k which is central for the theory of unramified representation of G over k . We prove that M_χ is flat over k for arbitrary k , and that if p is invertible in k , that M_χ^U is free of finite rank over k for U small compact open subgroup of G . This was conjectured by Lazarus. As a corollary, we obtain that if k is a field of characteristic different of p , M_χ has the same semi-simplification that the unramified principal serie with character χ , whose structure is known thanks to Vignéras.

Texte reçu le 19 juillet 2002, accepté le 20 décembre 2002

JOËL BELLAÏCHE, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2 (France) • *E-mail* : jbellaic@math.unice.fr

Url : <http://www.math.unice.fr/~jbellaic>

ANIA OTWINOWSKA, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail* : Ania.Otwinowska@math.u-psud.fr

Url : <http://www.math.u-psud.fr/~ania>

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C12, 20C20.

Mots clefs. — Platitude, module universel, représentations modulaires, représentations non ramifiées, immeubles.

1. Introduction

1.1. Soient G un groupe réductif \mathfrak{P} -adique, K un bon sous-groupe compact maximal de G (cf. [4], 4.4.1), λ un caractère de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, K)$ à valeurs dans un anneau k . Le *module universel non ramifié* associé à λ (nous dirons *module universel*) $M_{\lambda;k}$ (ou simplement M_λ , quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base k) a été introduit par Borel (dans le cas où $k = \mathbb{C}$) :

$$M_{\lambda;k} = \mathcal{C}(G/K) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k,$$

où $\mathcal{C}(G/K)$ désigne l'espace des fonctions sur G localement constantes à support compact K -invariantes à droite, et où k est muni d'une structure de module sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ via λ .

1.2. Depuis son introduction, le module universel a largement montré son utilité dans l'étude des représentations des groupes \mathfrak{P} -adiques, en particulier dans l'étude des représentations *modulaires* au sens de Brauer, *i.e.* définies sur un corps de caractéristique positive. Voir le cours de Serre au Collège de France [10], ainsi que sa lettre à Kazhdan [11], pour des applications aux formes modulaires classiques en caractéristique p . Voir [5], [1], pour des applications à l'augmentation du niveau des formes automorphes pour des groupes unitaires à trois variables.

1.3. L'objet de cet article est de démontrer la conjecture de Lazarus (voir [9], conjecture 1.0.5), et un peu plus, dans le cas où G est le groupe linéaire PGL_3 d'un corps \mathfrak{P} -adique. Cette conjecture affirme que pour G non ramifié⁽¹⁾ et de type adjoint, K hyperspécial, et k un corps de caractéristique différente de p , $\mathcal{C}(G/K, k)$ est plat sur l'anneau commutatif $\mathcal{H}_k(G, K)$.

Nous espérons pouvoir prouver par des méthodes semblables la conjecture de Lazarus pour PGL_d . Nous espérons aussi (mais ce sera sans doute plus difficile), que ces méthodes pourront mener à une preuve de la conjecture de Lazarus en général, *i.e.* pour tous les groupes réductifs de type adjoint.

1.4. Soient F une extension finie de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_F son anneau d'entiers, \bar{F} son corps résiduel, π une uniformisante et $d \geq 2$ un nombre entier. On pose $G = \mathrm{PGL}_d(F)$, et on note K l'image de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F)$ dans G . On fixe aussi un anneau quelconque k . L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, K)$ est alors commutative, isomorphe à une algèbre de polynômes $k[T_1, \dots, T_{d-1}]$, et pour tout caractère λ de cette algèbre, on introduit le module universel $M_\lambda = \mathcal{C}(G/K, k) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k$,

⁽¹⁾Les auteurs pensent qu'on peut étendre la conjecture de Lazarus en enlevant cette hypothèse, ainsi que celle sur K et toute restriction à l'anneau k . Voir en ce sens le théorème 1.5 ainsi que [1, ch. IV]. Rappelons (voir [9]) que l'hypothèse « de type adjoint » est nécessaire, ou du moins doit être remplacée par une hypothèse sur l'action du groupe de Weyl sur le tore maximal de G : l'énoncé de platitude est faux pour $G = \mathrm{SL}_3$ par exemple.

où $\mathcal{C}(G/K, k)$ désigne l'espace des fonctions à support fini sur G/K à valeurs dans k , vu comme un k -module sur lequel G agit à droite. Nous démontrons :

THÉORÈME 1.5. — *On suppose $d = 3$. Le module M_λ est plat sur k . De plus, si p est inversible dans k , pour tout pro- p -sous-groupe compact ouvert U de G , le k -module M_λ^U est libre et de type fini sur k .*

La première assertion de notre théorème implique (et est en fait équivalente à) la platitude de $\mathcal{C}(G/K, k)$ sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ pour tout anneau k . En effet, quand λ est le caractère tautologique $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_k(G, K)}(G, K) \rightarrow \mathcal{H}_k(G, K)$, le module universel $M_{\lambda; \mathcal{H}_k(G, K)}$ s'identifie comme module sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ à $\mathcal{C}(G/K)$.

Notons que pour d quelconque et k un corps de caractéristique banale pour GL_d , la preuve de la conjecture de Lazarus fait l'objet de l'article [8]. La méthode de Lazarus utilise un résultat de Kato [7] donnant une description de $\mathcal{C}(B \backslash G/K)$ (où B est un Iwahori de G) en caractéristique banale.

1.6. Notons également qu'en utilisant l'irréductibilité générique bien connue des séries principales non ramifiées pour GL_3 en caractéristique zéro, on déduit par une méthode classique (cf. [10], [9] ou [1, V.6.2.5]) de ce théorème le corollaire suivant, en utilisant le principe de Brauer pour les représentations lisses, cf. [14].

COROLLAIRE 1.7. — *Soit k un corps de caractéristique différente de p , et qui contient une racine carrée de q . Soient χ un caractère non ramifié du Borel standard de G et λ le caractère de $\mathcal{H}(G, K)$ associé à χ via l'isomorphisme de Satake. Alors les représentations M_λ et I_χ (où I_χ désigne l'induite unitaire de χ de B à G) ont mêmes facteurs de décomposition (avec les mêmes multiplicités).*

Comme la structure des séries principales non ramifiées est connue (voir [14], ch. III), on connaît aussi la semi-simplification des modules universels.

1.8. Notre méthode donne aussi l'information suivante (qui découle immédiatement du théorème 3.2.4 point 1) :

PROPOSITION 1.9. — *Soient L une extension finie de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_L son anneau d'entier et λ un caractère de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_L}(G, K)$. Alors le module $M_{\lambda; \mathcal{O}_L}$ ne contient pas de L -droites.*

Cette proposition signifie que le sous-module (c'est un sous-module d'après le théorème principal) $M_{\lambda; \mathcal{O}_L}$ de $M_{\lambda; L}$ est un réseau au sens de [3, p. 13], ce qui implique (*loc. cit.*) qu'il est libre sur \mathcal{O}_L . Pour $G = PGL_2(F)$, $F = \mathbb{Q}_p$ mais des représentations plus générales, un résultat analogue a été récemment démontré par Breuil [3, th. 3.3.2].

2. Traduction en un problème sur l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(F)$

2.1. Rappels et notations sur l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(F)$

2.1.1. On note X l'immeuble de Bruhat-Tits attaché (voir [2, exercice 10, §2]) au système de Tits standard [2, exercice 21, §2] de $G = \mathrm{PGL}_d(F)$. Nous renvoyons à [2, exercice 15, §1] pour la définition d'un immeuble, et à cet exercice et aux suivants pour les notions de facette, chambre, cloison, appartement. On appellera *arêtes* les facettes de cardinal 2 et *sommets* les éléments de X . On dira que deux sommets sont voisins si la paire qu'ils forment est une arête.

Rappelons [12, p. 88–90] que X est en bijection canonique avec les classes d'homothéties de \mathcal{O}_F -réseaux dans F^d et que deux sommets distincts x et x' sont voisins si et seulement s'il existe deux réseaux Λ et Λ' représentant x et x' tels que

$$\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda.$$

Le quotient $\Lambda'/\pi\Lambda$ est alors un sous- \bar{F} -espace vectoriel propre de $\Lambda/\pi\Lambda = \bar{F}^d$ dont la dimension est un entier compris entre 1 et $d-1$, dont la classe dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est appelée la *type* de l'arête (x, x') . Si x'' est un autre voisin de x , il est voisin de x' si et seulement si le sous-espace de $\Lambda/\pi\Lambda$ qui lui correspond contient ou est inclus dans celui qui correspond à x' . Les types des arêtes obéissent aux règles (évidentes) suivantes :

- si (x, x') est une arête de type i , alors (x', x) est une arête de type $-i$;
- si (x, x') , (x', x'') et (x, x'') sont trois arêtes, alors le type de (x, x'') est la somme de ceux de (x, x') et (x', x'') .

2.1.2. *Appartements*. — Rappelons (voir [12, §5]) qu'à une base (e_1, \dots, e_d) de F^d nous pouvons associer un *appartement* de X , défini comme l'ensemble des sommets de X représentés par des réseaux de la forme $\mathcal{O}_F\pi^{a_1}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_F\pi^{a_d}e_d$. Le choix d'une base détermine un isomorphisme entre A et $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$ (voir [12, p. 94]). Un représentant dans \mathbb{Z}^n d'une classe dans $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$ correspondant à un point $x \in A$ s'appelle un *système de coordonnées* de x .

Nous utiliserons librement le résultat suivant : deux facettes de X sont toujours contenues dans un même appartement [2, exercice 24, §1].

2.1.3. *Distance combinatoire*. — La *distance combinatoire* d sur X , ou simplement distance est définie ainsi : pour (x, x') dans X , $d(x, x')$ est le plus petit entier n tel qu'il existe des points $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x'$, tels que x_i et x_{i+1} soient voisins pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

Si A est un appartement contenant x et x' , et si (x_1, \dots, x_d) et (x'_1, \dots, x'_d) sont des systèmes de coordonnées de x et x' (pour une certaine base de F^d définissant l'appartement A), on vérifie facilement que

$$d(x, x') = \max_{i,j=1,\dots,d} |(x_i - x'_i) - (x_j - x'_j)|.$$

2.1.4. *Action de G .* — L'action naturelle de $GL_d(F)$ sur les \mathcal{O}_F -réseaux de F^d induit une action de G sur l'ensemble des sommets de X qui respecte la structure d'immeuble de X

2.1.5. *Boules et sphères.* — Nous supposons dorénavant fixé le sous-groupe compact maximal K de G et nous notons O l'unique sommet laissé fixe par K .

On note B_n (resp. S_n) la boule (resp. sphère) combinatoire de centre O et de rayon n , i.e. l'ensemble des sommets $x \in X$ vérifiant $d(O, x) \leq n$ (resp. $d(O, x) = n$).

On note K_n le fixateur dans G de la boule B_n . Si l'on choisit une base (e_1, \dots, e_d) de F^d telle que $\mathcal{O}_F e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_F e_d$ est un réseau représentant O , l'image réciproque du groupe K_n dans $GL_d(F)$ s'identifie au groupe des matrices congrues à une matrice scalaire inversible modulo π^n . Le groupe K_n est donc un sous-groupe compact ouvert de G , et un pro- p -groupe dès que $n \geq 1$. Les groupes K_n forment un système de voisinage de l'élément neutre dans G .

2.1.6. *Notations.* — Si Y est un sous-ensemble de X , on notera $\mathcal{C}(Y)$ le k -module des applications (ou « fonctions ») à support fini de Y dans k . On posera $C_n = \mathcal{C}(B_n)$.

2.2. Traduction du problème en terme d'immeubles

2.2.1. Comme G agit transitivement sur X , on dispose d'une bijection canonique $G/K \simeq X$ ($g \mapsto gO$). L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$ agit naturellement à droite sur $\mathcal{C}(G/K)$, et cette action identifie $\mathcal{H}(G, K)$ à l'algèbre des endomorphismes k -linéaires sur $\mathcal{C}(G/K)$ commutant à l'action de G .

En particulier, pour $i = 1, \dots, d - 1$, les opérateurs T_i définis par

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall x \in X, \quad (T_i f)(x) = \sum_{\substack{y \text{ voisin de} \\ \text{type } i \text{ de } x}} f(y)$$

commutent à l'action de G et appartiennent à $\mathcal{H}_k(G, K)$. On sait que ces éléments sont algébriquement indépendants et que $\mathcal{H}_k(G, K) = k[T_1, \dots, T_{d-1}]$.

2.2.2. Soit λ un caractère de $\mathcal{H}_k(G, K)$. Posons $\lambda_i = \lambda(T_i)$. Le k -module M_λ de l'introduction s'identifie, avec son action de G , au quotient

$$\mathcal{C}(X) / (\text{Im}(T_1 - \lambda_1) + \dots + \text{Im}(T_{d-1} - \lambda_{d-1})).$$

2.3. Quelques résultats particuliers à l'immeuble de PGL_3 .

— Dorénavant, on prend $d = 3$.

2.3.1. Soit X l'immeuble de PGL_3 . Les arêtes orientées sont alors de deux types : 1 ou 2 mod 3. Une arête non orientée a une unique orientation pour laquelle elle est de type 1 ; sur les dessins, on représentera toujours cette orientation par une flèche.