Bull. Soc. math. France
131 (4), 2003, p. 527–551

TRANSFORMATION DE FOURIER HOMOGÈNE

PAR GÉRARD LAUMON

RÉSUMÉ. — Dans leur démonstration de la correspondance de Drinfeld-Langlands, Frenkel, Gaitsgory et Vilonen utilisent la transformation de Fourier géométrique, ce qui les oblige à travailler soit avec les faisceaux ℓ-adiques en caractéristique $p > 0$, soit avec les $\mathcal{D}$-Modules en caractéristique 0. En fait, ils n'utilisent cette transformation de Fourier géométrique que pour des faisceaux homogènes pour lesquels on s'attend à avoir une transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}$. L'objet de cette note est de proposer une telle transformation de Fourier qui prolonge la transformation de Radon géométrique étudiée par Brylinski.

ABSTRACT (*Homogeneous Fourier transformation*). — In their proof of the Drinfeld-Langlands correspondence, Frenkel, Gaitsgory and Vilonen make use of a geometric Fourier transformation. Therefore, they work either with ℓ-adic sheaves in characteristic $p > 0$, or with $\mathcal{D}$-modules in characteristic 0. Actually, they only need to consider the Fourier transforms of homogeneous sheaves for which one expects a geometric Fourier transformation over $\mathbb{Z}$. In this note, we propose such a homogeneous geometric Fourier transformation. It extends the geometric Radon transformation which has been studied by Brylinski.

Dans leur démonstration de la correspondance de Drinfeld-Langlands [5], Frenkel, Gaitsgory et Vilonen utilisent la transformation de Fourier géométrique, ce qui les obligent soit à supposer que le corps de base est de caractéristique $p > 0$ et à travailler avec les faisceaux ℓ-adiques, soit à supposer qu'il est

Texte reçu le 8 novembre 2002, accepté le 17 janvier 2003

GÉRARD LAUMON, Université Paris-Sud et CNRS, UMR 8628, Mathématique, Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* `Gerard.Laumon@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11T23, 14F20, 14F22.

Mots clefs. — Transformation de Fourier, faisceaux pervers, champs algébriques.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2003/527/$ 5.00
© Société Mathématique de France

de caractéristique 0 et à travailler avec les $\mathcal{D}$-Modules. En fait, ils n'utilisent cette transformation de Fourier géométrique que pour des faisceaux homogènes pour lesquels on s'attend à avoir une transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}$ qui prolonge la transformation de Radon géométrique étudiée par Brylinski dans [3]. L'objet de cette note est de proposer une telle transformation de Fourier.

Je remercie Bourbaki de m'avoir donné l'occasion de réfléchir à ce problème en préparant un exposé à son séminaire [10]. Je remercie aussi L. Illusie pour son aide durant la rédaction de cette note. Je remercie enfin S. Lysenko et le rapporteur pour leurs commentaires et suggestions.

1. La transformation de Fourier homogène

1.1. Soient S un schéma et $\pi : V \to S$ un fibré vectoriel de rang constant r sur S. Le S-schéma en groupes multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$ agit par homothétie sur V et on peut former le S-champ quotient

$$V \xrightarrow{\ \rho\ } \mathcal{V} = [V/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \xrightarrow{\ \overline{\pi}\ } S$$

de V par cette action. Rappelons que, pour tout S-schéma U, un objet de la catégorie $\mathcal{V}(U)$ est un couple $(\mathcal{L}, x)$ formé d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur U et d'un morphisme de $\mathcal{O}_U$-Modules $x : \mathcal{L} \to \mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_S} V$ où V est ici considéré comme un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre de rang constant r. Le S-champ $\mathcal{V}$ est algébrique, de type fini et lisse purement de dimension relative $r-1$, et le morphisme quotient ρ est un $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-torseur représentable. Pour $V = \mathbb{A}^1_S$ le fibré trivial de rang 1, on note $\mathcal{A}_S$ le champ $\mathcal{V}$ correspondant.

Soient $\pi^\vee : V^\vee \to S$ le fibré vectoriel dual de π et

$$\langle\ ,\ \rangle : V^\vee \times_S V \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$$

l'accouplement canonique. Comme précédemment, on forme le S-champ quotient

$$V^\vee \xrightarrow{\ \rho^\vee\ } \mathcal{V}^\vee = [V^\vee/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \xrightarrow{\ \overline{\pi}^\vee\ } S$$

et l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ induit un S-morphisme

$$\mu : \mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{A}_S.$$

Plus précisément, si U est un S-schéma, μ envoie un objet $((\mathcal{M}, y), (\mathcal{L}, x))$ de $(\mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V})(U)$ sur l'objet

$$\big(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L}, \langle y, x\rangle : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L} \to \mathcal{O}_U \otimes_{\mathcal{O}_S} V^\vee \otimes_{\mathcal{O}_S} V \to \mathcal{O}_U\big)$$

de $\mathcal{A}_S(U)$.

1.2. On fixe un nombre premier ℓ inversible sur S et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$. On suppose que S est de type fini sur un anneau régulier R de dimension ≤ 1, de sorte que l'on devrait disposer d'un formalisme ℓ-adique des six opérations de Grothendieck sur la catégorie des S-champs algébriques de type fini (cf. [4], [1] et [11]), ce que nous admettrons ici. Pour tout S-champ $\mathcal{X}$ de type fini, on a donc des catégories dérivées $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset D^{\pm}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, avec

- des foncteurs

$$f_* : D^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y},\overline{\mathbb{Q}}_\ell), \qquad f_! : D^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$f^* : D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad f^! : D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

  pour tout S-morphisme $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de S-champs algébriques de type fini, les foncteurs f_* et $f_!$ respectant $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}$ lorsque f est représentable ;
- un foncteur « Hom interne »

$$\mathcal{H}om : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}} \times D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell);$$

- un foncteur de dualité involutif

$$D_{\mathcal{X}} : D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}} \longrightarrow D^{\mp,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

  défini par

$$D_{\mathcal{X}}(K) = \mathcal{H}om\big(K, \varepsilon^!\overline{\mathbb{Q}}_\ell[2d](d)\big)$$

  où $\varepsilon : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ est le morphisme structural et d ($= 0$ ou 1) est la dimension de R ;
- des isomorphismes canoniques de foncteurs

$$D_{\mathcal{X}} \circ f_* \cong f_! \circ D_{\mathcal{X}} \quad \text{et} \quad D_{\mathcal{X}} \circ f^* \cong f^! \circ D_{\mathcal{X}};$$

- deux produits tensoriels internes échangés par la dualité,

$$\begin{aligned} \otimes : D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\longrightarrow D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \widetilde{\otimes} : D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\longrightarrow D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell), \\ (K_1,K_2) &\longmapsto D_{\mathcal{X}}\big(D_{\mathcal{X}}(K_1) \otimes D_{\mathcal{X}}(K_2)\big); \end{aligned}$$

- un isomorphisme canonique $\mathcal{H}om(K,L) \cong D_{\mathcal{X}}(K)\widetilde{\otimes}L$ fonctoriel en (K,L) dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}} \times D^{\pm,\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

On dispose aussi de la sous-catégorie strictement pleine $\mathrm{Perv}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers pour la fonction de dimension rectifiée introduite par M. Artin (cf. [2] et [6]). Si X est un schéma de type fini sur S, rappelons que cette fonction est définie par

$$\delta(x) = \dim\big(\overline{\{\mathfrak{p}\}}\big) + \deg.\mathrm{tr}\big(\kappa(x)/\kappa(\mathfrak{p})\big), \quad \forall x \in X,$$

où $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ est l'image de x, $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ est l'adhérence de $\{\mathfrak{p}\}$ dans $\mathrm{Spec}(R)$, $\kappa(x)$ est le corps résiduel de x et $\kappa(\mathfrak{p})$ est le corps des fractions de $R/\mathfrak{p}$, et rappelons que $K \in \mathrm{ob}\, D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers si et seulement si, pour tout point $x \in X$, on a

$$\mathcal{H}^n i_x^* K = (0),\ \forall n > -\delta(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^n i_x^! K = (0),\ \forall n < -\delta(x),$$

où $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$ est l'inclusion.

La sous-catégorie $\mathrm{Perv}(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est stable par la dualité $D_{\mathcal{X}}$ et elle est nœthérienne et artinienne (tous ses objets sont de longueur finie).

1.3. L'inclusion naturelle $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S} \hookrightarrow \mathbb{A}_S^1$ passe au quotient en une immersion ouverte

$$\beta : S = [\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \longrightarrow \mathcal{A}_S.$$

On note

$$\Psi = \beta_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \in D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}_S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

l'image directe totale du faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur S par cette dernière immersion ouverte. Le théorème de pureté cohomologique nous donne un triangle distingué

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \Psi \longrightarrow \alpha_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-1](-1) \longrightarrow$$

dans $D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}_S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, où $\alpha : B(\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}) = [S/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \hookrightarrow \mathcal{A}_S$ est l'immersion fermée complémentaire de β.

LEMME 1.4. — (i) *Pour toute section $a : S \to \mathbb{A}_S^1$ de $\mathbb{A}_S^1$, on a*

$$h_! v_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = (0)$$

où $v : \mathbb{A}_S^1 - a(S) \hookrightarrow \mathbb{A}_S^1$ est l'ouvert complémentaire de l'image de la section et $h : \mathbb{A}_S^1 \to S$ est le morphisme structural.

(ii) *On a un isomorphisme canonique*

$$\alpha^* \beta_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]$$

où $g : S \to B(\mathbb{G}_{\mathrm{m},S})$ est le $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-torseur universel.

Démonstration. — Commençons par l'assertion (i). Par le théorème de changement de base propre, on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et donc que a est un point fermé de $\mathbb{A}^1$ (pour alléger la rédaction, on supprime l'indice S des notations). Il s'agit alors de démontrer que

$$R\Gamma_{\mathrm{c}}(\mathbb{A}^1, v_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = (0),$$

ou ce qui revient au même par dualité, que

$$R\Gamma(\mathbb{A}^1, v_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = (0).$$

Or, on a le triangle distingué

$$R\Gamma(\mathbb{A}^1, v_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{A}^1, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow$$

où la deuxième flèche est la flèche de restriction à $\{a\} \subset \mathbb{A}^1$ et est donc un isomorphisme, d'où la conclusion.

Démontrons maintenant l'assertion (ii). Pour cela considérons le triangle distingué

$$\beta_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \beta_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \alpha_*\alpha^*\beta_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

dans $D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}_S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et appliquons lui le foncteur $h_!$ pour le morphisme

$$h : \mathcal{A}_S = [\mathbb{A}_S^1/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \longrightarrow [S/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] = B(\mathbb{G}_{\mathrm{m},S})$$

qui est induit par le morphisme structural $\mathbb{A}_S^1 \to S$. On obtient le triangle distingué

$$g_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow h_!\beta_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \alpha^*\beta_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

dans $D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(B(\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Ce dernier triangle dégénère en un isomorphisme

$$\alpha^*\beta_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} g_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]$$

puisqu'on a $h_!\beta_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell = (0)$ d'après la partie (i) déjà démontrée. □

Définition 1.5. — La transformation de Fourier homogène est le foncteur

$$\mathrm{Four}_{\mathcal{V}/S} : D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_{\mathrm{c}}^{-}(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

défini par

$$\mathrm{Four}_{\mathcal{V}/S}(K) = \mathrm{pr}_!^\vee(\mathrm{pr}^* K \otimes \mu^*\Psi)[r-1]$$

où $\mathrm{pr}^\vee$ et pr sont les projections canoniques de $\mathcal{V}^\vee \times_S \mathcal{V}$.

Les immersions ouvertes $V^\circ \hookrightarrow V$ et $V^{\vee\circ} \hookrightarrow V^\vee$ des complémentaires des sections nulles des fibrés vectoriels V et $V^\vee$ passent au quotient en des immersions ouvertes

$$j : \mathbb{P}(V) = \mathcal{V}^\circ = [V^\circ/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \longrightarrow \mathcal{V},$$
$$j^\vee : \mathbb{P}(V^\vee) = \mathcal{V}^{\vee\circ} = [V^{\vee\circ}/\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}] \longrightarrow \mathcal{V}^\vee$$

où $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V^\vee)$ sont les S-fibrés projectifs des droites de V/S et $V^\vee/S$ respectivement. Notons

$$I : H \hookrightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times_S \mathbb{P}(V)$$

l'hypersurface d'incidence, quotient du fermé de $V^{\vee\circ} \times_S V^\circ$ d'équation $\langle w, v\rangle = 0$. Notons enfin

$$J : \big(\mathbb{P}(V^\vee) \times_S \mathbb{P}(V)\big) - H \hookrightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \times_S \mathbb{P}(V)$$

l'immersion ouverte complémentaire du fermé H. Comme H est un diviseur lisse sur S dans un schéma lisse sur S, une nouvelle application du théorème de pureté donne un triangle distingué

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[2r-2] \longrightarrow J_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell[2r-2] \longrightarrow I_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell[2r-3](-1) \longrightarrow$$

dans $D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}(V^\vee) \times_S \mathbb{P}(V), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.