Bull. Soc. math. France
132 (1), 2004, p. 1–54

INTÉGRATION MOTIVIQUE SUR LES SCHÉMAS FORMELS

PAR JULIEN SEBAG

RÉSUMÉ. — Nous généralisons la théorie de l'intégration motivique au cadre des schémas formels. Nous définissons et étudions l'anneau booléen des ensembles mesurables, la mesure motivique, l'intégrale motivique et nous démontrons un théorème de changement de variables pour cette intégrale.

ABSTRACT (*Motivic Integration on Formal Schemes*). — We generalize the theory of motivic integration on formal schemes. In particular, we define and study the boolean ring of mesurable subsets, the motivic measure, the motivic integral and we prove a theorem of change of variables for this integral.

1. Introduction

1.1. Dans leurs articles [10] et [12] (*cf.* également [11]), Denef et Loeser développent et étudient la théorie de l'*intégration motivique* pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique 0, introduite par Kontsevich lors d'un séminaire à Orsay (*cf.* [18]). Dans [20], Looijenga étend la construction à la catégorie des variétés algébriques sur un anneau de séries formelles de corps résiduel de caractéristique 0. Cette nouvelle théorie de l'intégration se révèle être un outil puissant dans l'étude de la géométrie birationnelle des variétés algébriques sur un corps k de caractéristique 0. Rappelons rapidement les grandes étapes de la construction de ces intégrales et les idées sous-jacentes

Texte reçu le 14 janvier 2002, révisé le 16 décembre 2002, accepté le 7 mars 2003
JULIEN SEBAG, Université de Bordeaux, AZX, UMR 5465 CNRS, 351, cours de la libération, 33405 Talence Cedex (France) • *E-mail :* `Julien.Sebag@math.u-bordeaux.fr`
Classification mathématique par sujets (2000). — 14-XX, 28-XX.
Mots clefs. — Géométrie algébrique, géométrie formelle, intégration motivique.

à quelques-uns des résultats obtenus par cette théorie. Si X est une variété algébrique sur un corps k de caractéristique 0, on lui associe, de manière fonctorielle, un pro-k-schéma, qui est encore un schéma (non localement de type fini en général), le *schéma des arcs sur* X, noté $L(X)$. Sur ce pro-k-schéma, on définit une mesure μ_X à valeurs dans un anneau de motifs virtuels. Cette mesure motivique est un analogue géométrique de la mesure p-adique sur les variétés différentielles p-adiques. Les intégrales définies à partir de cette mesure vérifient alors un théorème de changement de variables pour les k-morphismes de schémas $h : Y \to X$ propres et birationnels, qui permet de calculer les intégrales sur $L(X)$ en fonction d'intégrales sur $L(Y)$. C'est essentiellement par ce principe que l'on peut construire de nouveaux invariants algébriques (à valeurs dans cet anneau de motifs virtuels, ou plus exactement dans le séparé complété de cet anneau pour une filtration) et que l'on peut, par exemple, (re)-démontrer le théorème de Batyrev qui affirme que deux variétés de Calabi-Yau, birationnellement équivalentes, ont mêmes nombres de Hodge et même structure de Hodge.

1.2. Dans cet article, nous généralisons cette théorie de l'intégration motivique aux schémas formels *sttf* sur le spectre formel d'un anneau de valuation discrète complet R, de corps résiduel k parfait. En particulier, le corps k peut être de caractéristique positive. L'absence du morphisme d'inclusion $k \hookrightarrow R$, dans le cas où R est un anneau d'inégales caractéristiques, nous conduit à définir un analogue du schéma des arcs d'une variété X. Si X est un R-schéma formel *sttf*, le *schéma de Greenberg* $\mathrm{Gr}(X)$ joue ce rôle. Il est important de noter que, dans le cas où $R = k[[t]]$, avec k de caractéristique 0, et $\widehat{X}$ est le complété π-adique d'une k-variété algébrique vue sur $k[[t]]$, les deux k-schémas $\mathrm{Gr}(\widehat{X})$et $L(X)$ sont canoniquement isomorphes. En outre, pour tout R-schéma formel *sttf*, si F est une extension parfaite de k, les F-points de $\mathrm{Gr}(X)$ s'interprètent naturellement comme des points de la fibre générique X_K de X. Comme dans le cas du schéma des arcs, nous définissons l'anneau booléen des *ensembles mesurables*, qui sont des « approximations » par certaines parties constructibles de $\mathrm{Gr}(X)$ élémentaires, que l'on appelle *cylindres*. Rappelons que le produit fibré au-dessus de k induit sur le groupe de Grothendieck de la catégorie des k-variétés une structure d'anneau (puisque k est parfait). On note M_k le localisé de cet anneau par rapport à la classe de la droite affine. La définition des ensembles mesurables nous permet de construire une mesure μ_X à valeurs dans un complété de l'anneau M_k. De manière analogue aux théories classiques d'intégration, les ensembles mesurables possèdent des propriétés de stabilité par image directe et inverse sous certains R-morphismes $h : Y \to X$, que l'on nomme *tempérés*, et qui correspondent aux morphismes propres et birationnels du cas algébrique. Nous construisons l'intégrale motivique des fonctions intégrables. Parmi celles-ci, les fonctions *exponentiellement intégrables* permettent d'exprimer, de manière naturelle, des phénomènes géométriques comme l'appartenance à un sous-R-schéma formel fermé, la lissité d'un R-morphisme de schémas formels… et jouent donc un rôle central dans cette théorie. Enfin, nous démontrons deux théorèmes de changement de variables du même type que celui énoncé dans [10] ou [12].

1.3. Les principaux résultats de ce travail sont utilisés de manière fondamentale dans [19], qui, en se plaçant du point de vue rigide, déduit, des constructions et théorèmes de cet article, certaines applications en géométrie birationnelle des dégénérescences des variétés algébriques et rigides. En particulier, la théorie que l'on développe ici apparaît, au regard des résultats de [19], comme l'analogue (ou la généralisation) de l'intégration motivique usuelle et de l'intégration p-adique. Deux exemples le confirment. Soit X_K la fibre générique d'un R-schéma formel X *sttf*.

1) Si ω est une forme jauge sur X_K, son intégrale converge déjà dans M_k. En outre, nous démontrons que sa classe dans $M_k/(\mathbf{L}-1)M_k$ ne dépend que de X_K et non de la forme jauge choisie pour calculer cette intégrale. Cet élément de M_k, noté $\lambda(X_K)$, est égal à la classe de la fibre spéciale de tout modèle de Néron faible de X_K. Il faut également remarquer que, quand K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\lambda(X_K)$ se spécialise en l'invariant de Serre [25] évalué sur la variété analytique p-adique « naïve » sous-jacente à X_K (*cf.* corollaire 4.6.3 de [19]).

2) Si X_K est l'espace analytique associé une variété de Calabi-Yau sur K, et si X_K admet un R-modèle propre et lisse, l'intégrale calculée pour un générateur de $\Omega^d_{X_K}$ est égale à la classe de la fibre spéciale de ce modèle dans M_k. En particulier, les classes des fibres spéciales de deux tels modèles coïncident dans M_k, ce qui peut être interprété comme l'analogue du résultat de Batyrev [2] pour les variétés de Calabi-Yau.

1.4. Cet article est organisé de la manière suivante : le chapitre 2 rappelle les bases de la géométrie formelle. Le foncteur de Greenberg est construit et étudié au chapitre 3. Les chapitres 4, 5, et 6 développent, de manière assez complète, les notions et les propriétés de la mesure motivique, des cylindres et des ensembles mesurables. Le chapitre 7 est consacré à l'étude de la stabilité de la mesurabilité par image directe et inverse. Au chapitre 8, nous énonçons et démontrons deux théorèmes de changement de variables.

Nous remercions François Loeser de nous avoir proposé ce sujet et de l'aide qu'il nous a apportée lors des discussions que nous avons eues ensemble. Nous souhaitons également remercier Antoine Chambert-Loir de son aide lors de la rédaction de cet article et de ses commentaires sur une première version de ce texte. Plus largement, nous les remercions pour l'attention qu'ils nous ont manifestée depuis quelques années déjà.

2. Préliminaires

2.1. Les premières notions de géométrie formelle.

2.1.1. La définition des schémas formels. — Un $\mathbb{D}$-schéma formel désignera toujours un $\mathbb{D}$-schéma formel topologiquement de type fini, ce que l'on notera *ttf.* Parfois l'hypothèse de séparation sera nécessaire et nos $\mathbb{D}$-schémas formels *ttf* seront séparés, ce que l'on notera *sttf* (*cf.* [16, §10]).

On notera $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{ttf}}_{/\mathbb{D}}$ et $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{sttf}}_{/\mathbb{D}}$ les catégories correspondantes.

Un objet de $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{ttf}}_{/\mathbb{D}}$ est un espace localement annelé (X, O_X) en R-algèbres topologiques, qui induit la donnée, pour tout $n \geq 0$, d'un R_n-schéma

$$X_n = (X, O_X \otimes_R R_n).$$

Le k-schéma X_0 est appelé fibre spéciale du $\mathbb{D}$-schéma formel X. En tant qu'espaces topologiques, X et X_0 sont isomorphes et $O_X := \varprojlim O_{X_n}$. On a

$$X_n = X_{n+1} \otimes_{R_{n+1}} R_n$$

et X est canoniquement isomorphe à la limite inductive des schémas X_n dans la catégorie des espaces localement annelés. En outre, un tel objet est localement isomorphe à un $\mathbb{D}$-schéma formel affine $\mathrm{Spf}\, A$, où A est une R-algèbre π-adique, topologiquement isomorphe à un quotient de l'anneau des séries formelles restreintes $R\{T_1, \ldots, T_N\}$.

Si X et Y sont deux $\mathbb{D}$-schémas formels *ttf*, on note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(Y, X)$ l'ensemble des $\mathbb{D}$-morphismes de schémas formels :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & \mathbb{D} & \end{tikzcd}$$

i.e. l'ensemble des morphismes entre les $\mathbb{D}$-espaces localement annelés sous-jacents. Autrement dit, $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{ttf}}_{/\mathbb{D}}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés sur $\mathbb{D}$. Localement de tels morphismes sont simplement des R-morphismes continus d'algèbres topologiques entre les anneaux des sections globales. On peut montrer (*cf.* prop. 10.6.9 de [16]) que l'application canonique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(Y, X) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_{R_n}(Y_n, X_n)$ est une bijection.

Remarque 2.1.2. — Soit

$$h : Y = \mathrm{Spf}\, R\{x_1, \ldots, x_m\}/I \to X = \mathrm{Spf}\, R\{x_1, \ldots, x_n\}/J$$

un $\mathbb{D}$-morphisme de schémas formels. Dans ce cas, la donnée de h est équivalente à celle d'un R-morphisme d'algèbres. En effet, la R-linéarité impose que le morphisme entre les anneaux des sections globales est continu pour les topologies π-adiques considérées.

La catégorie $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{sttf}}_{/\mathbb{D}}$ est simplement la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{ttf}}_{/\mathbb{D}}$, dont les objets sont séparés (*cf.* [16, § 10]). Un $\mathbb{D}$-schéma formel *sttf* X est dit *admissible* s'il est plat sur $\mathbb{D}$ (ce qui est équivalent au fait que le faisceau O_X soit sans π-torsion). On notera $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{Adm}}_{/\mathbb{D}}$ cette catégorie, qui est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{sttf}}_{/\mathbb{D}}$.

Si X est un $\mathbb{D}$-schéma formel, on notera X_{red} le sous-schéma formel fermé et réduit de X défini par le faisceau d'idéaux $\sqrt{0}$.

Remarque 2.1.3. — Si X est un $\mathbb{D}$-schéma formel admissible et si X_0 est un k-schéma réduit, alors X est réduit.

2.1.4. La notion de fibre générique d'un schéma formel. — Soient X un $\mathbb{D}$-schéma formel *ttf* et $Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé de X, défini par le sous-faisceau $A \subset O_X$. On appelle *éclatement admissible sur X de centre Z* la donnée d'un $\mathbb{D}$-schéma formel X' et d'un $\mathbb{D}$-morphisme de schémas formels $\sigma : X' \to X$ tel que $A \cdot O_{X'}$ est inversible et vérifiant la propriété universelle suivante : si $\psi : Y \to X$ est un $\mathbb{D}$-morphisme de schémas formels tel que $A \cdot O_Y$ soit inversible sur Y, alors il existe un $\mathbb{D}$-morphisme $\psi' : Y \to X'$ tel que $\psi = \sigma \circ \psi'$. Si X est *sttf* (*resp. admissible*), le $\mathbb{D}$-schéma formel X' l'est aussi (*cf.* [4], § 2 et spécialement le lemme 2.2).

La localisation de la catégorie $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{ttf}}_{/\mathbb{D}}$ (*resp.* $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{sttf}}_{/\mathbb{D}}$) par rapport aux éclatements admissibles est équivalente à la catégorie des K-espaces rigides de type fini et quasi-séparés (*resp.* séparés) au sens de Kiehl, que l'on notera $\underline{\mathrm{Rig}}^{\mathrm{qsqc}}_{/K}$ (resp. $\underline{\mathrm{Rig}}^{\mathrm{sqc}}_{/K}$) (*cf.* [23] et [4, th. 4.1]). On peut remarquer que la localisée de $\underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{Adm}}_{/\mathbb{D}}$ par rapport aux éclatements admissibles est équivalente à $\underline{\mathrm{Rig}}^{\mathrm{sqc}}_{/K}$.

Par analogie avec le cas de schémas usuels, on appellera fibre générique l'image d'un $\mathbb{D}$-schéma formel *ttf* par le foncteur de localisation. Ce foncteur sera noté rig et si $X \in \underline{\mathrm{Form}}^{\mathrm{ttf}}_{/\mathbb{D}}$ on notera X_{rig} son image par le foncteur rig (ou parfois X_K). De même, si $f : Y \to X$ est un $\mathbb{D}$-morphisme de schémas formels, on notera f_{rig} son image par le foncteur rig.

2.1.5. La notion de dimension d'un schéma formel. — Soit X un $\mathbb{D}$-schéma formel. On appelle *dimension* de X l'entier $\dim X$ défini comme la dimension de la fibre spéciale X_0 de X. En particulier, si $X := \mathrm{Spf}\, A$ est plat sur R, on a la relation

$$\dim X = \dim_{\mathrm{K}} A - 1$$

où $\dim_{\mathrm{K}} A$ est la dimension de Krull de l'anneau A.

Soit X_K un K-espace rigide quasi-séparé et quasi-compact. On appelle *dimension* de X_K et l'on note $\dim X_K$ l'entier naturel défini comme la borne supérieure des entiers $\dim_{\mathrm{K}} O_{X_K,x}$ pour $x \in X_K$.